Jurnal Natural
Vol.17, No.2, 2017
pISSN 1411-8513
eISSN 2541-4062

SHALLOW WATER EQUATION SOLUTION IN 2D USING FINITE DIFFERENCE METHOD WITH EXPLICIT SCHEME

Nuraini[1]*, Syamsul Rizal[2], Marwan[1]

[1]Jurusan Matematika, Pascasarjana Matematika, Universitas Syiah Kuala, Banda Aceh
[2]Jurusan Ilmu Kelautan, Universitas Syiah Kuala, Banda Aceh
*Email: nuraini_1986@yahoo.com

Abstract. *Modeling the dynamics of seawater typically uses a shallow water model. The shallow water model is derived from the mass conservation equation and the momentum set into shallow water equations. A two-dimensional shallow water equation alongside the model that is integrated with depth is described in numerical form. This equation can be solved by finite different methods either explicitly or implicitly. In this modeling, the two dimensional shallow water equations are described in discrete form using explicit schemes.*

Keyword: *shallow water equation, finite difference and schema explisit.*

I PENDAHULUAN

Persamaan air dangkal banyak digunakan dalam berbagai masalah kelautan dan atmosfer. Model ini diterapkan pada lapisan cairan kepadatan konstan dimana skala horizontal aliran jauh lebih besar dari kedalaman lapisan. Gelombang air dangkal terjadi pada kedalaman kurang dari seperduapuluh dari panjang gelombang. Gelombang air dangkal adalah gelombang yang terjadi pada permukaan air dangkal dimana panjang gelombang cukup besar dibandingkan dengan kedalamannya. Persamaan gelombang air dangkal merupakan salah satu model gelombang permukaan yang banyak digunakan untuk mensimulasikan penyebaran gelombang permukaan yang berjalan dua arah dalam ruang 1D. Pada kasus dimana panjang gelombang jauh lebih besar dari pada kedalaman air dan tidak terjadi perlapisan, maka variasi kecepatan dalam arah vertikal biasanya kecil dan jarang ditinjau. Aliran air di laut, danau, dan sungai dapat dimodelkan oleh ekspresi matematika yang dikenal sebagai persamaan *Navier-Stoke*. Namun, dalam pelaksanaannya, persamaan disederhanakan sesuai dengan karakteristik masalah yang dikaji. Persamaan air dangkal merupakan formulasi yang sangat efisien untuk menggambarkan fenomena dinamika fluida dengan asumsi panjang gelombang air dangkal berlaku [1].

Persaman air dangkal merupakan persaman bagi gelombang air yang permukaannya dipengaruhi oleh kedalaman. Sistem dianggap air dangkal jika kedalaman fluida jauh lebih kecil daripada panjang gelombangnya atau persaman air dangkal hanya berlaku untuk gelombang yang memiliki perbandingan amplitudo gelombang dan panjang gelombang sebesar 1:10. Persaman air dangkal berlaku untuk fluida yang memiliki masa jenis konstan, tidak kental, dan tidak dapat ditekan. Dalam hal ini, persamaan air dangkal merupakan persamaan bagi gelombang air yang profil permukaannya dipengaruhi oleh kedalaman [2]. Persamaan gelombang air dangkal ini terdiri dari dua buah persamaan, yang pertama diturunkan dari hukum konservasi massa dan yang kedua diturunkan dari hukum konservasi momentum [2].

Solusi persamaan air dangkal tersebut cukup sulit untuk diselesaikan secara analitik, sehingga diperlukan cara lain untuk memecahkannya. Metode numerik adalah salah satu cara untuk memperoleh solusi persamaan air dangkal tersebut [3]. Metode numerik merupakan alat untuk memecahkan masalah matematika yang handal. Banyak permasalahan teknik yang mustahil dapat diselesaikan dengan numerik, karena sering dihadapkan pada sistem-sistem persamaan yang besar, tidak linear dan cakupan yang komplek [4]. Model yang dihasilkan telah terbukti secara numerik stabil, sangat efisien dan telah berhasil digunakan pada sejumlah aplikasi [5].

Pada kasus ini persamaan air dangkal diselesaikan dengan menggunakan metode beda hingga skema eksplisit. Metode beda hingga adalah metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial yang sulit diselesaikan secara analitik. Persamaan diferensial parsial didiskritkan menggunakan persamaan beda hingga [6]

II METODOLOGI

Dalam koordinat kartesian dua dimensi, persamaan pengatur dapat dituliskan sebagai berikut [2]:

persamaan momentum arah *x*:

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}=f\bar{v}-g\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{-\tau_x^{bot}}{\rho_0 h}+A_h\left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}\right) \quad (1)$$

persamaan momentum arah *y*:

$$\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}-f\bar{u}=-g\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{-\tau_y^{bot}}{\rho_0 h}+A_h\left(\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial y^2}\right) \quad (2)$$

persamaan kontinuitas:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial(\bar{u}h)}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{v}h)}{\partial y}=0 \quad (3)$$

dimana $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ menyatakan kecepatan arus yang dirata-ratakan terhadap kedalaman yang didefinisikan sebagai:

$$\bar{u}=\frac{1}{h}\int_{-h_0}^{\eta}udz \quad (4)$$

$$\bar{v}=\frac{1}{h}\int_{-h_0}^{\eta}vdz \quad (5)$$

dan η adalah elevasi muka air laut, *h* adalah kedalaman total yang didefinisikan sebagai:

$$h=h_0+\eta \quad (6)$$

dengan h_0 adalah kedalaman air rata-rata. τ_x^{bot} dan τ_y^{bot} adalah tekanan gesekan dasar yang didefinisikan sebagai:

$$\tau_x^{bot}=\rho r\bar{u}\sqrt{\bar{u}^2+\bar{v}^2} \quad (7)$$

$$\tau_y^{bot}=\rho r\bar{v}\sqrt{\bar{u}^2+\bar{v}^2} \quad (8)$$

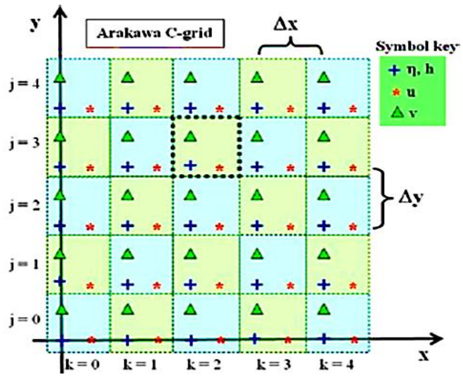
dengan ρ adalah densitas air laut (1028 kg/m^3), C_f adalah koefisien gesekan dasar, *f* adalah Coriolis (2Ωsinϕ), ϕ adalah lintang geografis (rad), Ω adalah kecepatan sudut rotasi bumi (=7,29 x 10^{-5} rad/dt), s adalah waktu, x dan y adalah koordinat kartesian arah barat-timur dan utara-selatan dan $A_{h\ adalah}$ viskositas eddy horizontal (m^2/s).

III HASIL DAN PEMBAHASAN

Solusi numerik diselesaikan menggunakan metode eksplisit terhadap ruang dan beda maju untuk turunan terhadap waktu. Sedangkan kestabilan numerik pada metode ini ditentukan oleh kriteria stabilitas CFL (*Couran Friedrichs Lewy*) yang ditunjukan dalam rumusan [2]:

$$\Delta t\le\frac{\min(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{2gh_{\max}}} \quad (9)$$

dengan $\Delta x,\Delta y$ adalah lebar grid (*m*), Δt adalah interval waktu (*s*) dan *g* adalah percepatan gravitasi (*m/s*^{2}).



Gambar 1 Skema diskritasi grid Arawaka C

Dengan menggunakan metode beda hingga eksplisit dan mengikuti skema pada Gambar 1, persamaan air dangkal 2D dapat didiskritisasi sebagai berikut:

Persamaan kontinuitas

$$\eta_{j,k}^{n+1}=\eta_{j,k}^{n}-\left[\Delta t^*\left(DHUX-DHUY\right)\right] \quad (10)$$

dengan:

$$Hx1=\frac{1}{2}\left(h_{j,k}+\eta_{j,k}^{n}+h_{j+1,k}+\eta_{j+1,k}^{n}\right)$$

$$
\begin{aligned}
Hx2 &= \frac{1}{2}\left(h_{j-1,k} + \eta^n_{j-1,k} + h_{j,k} + \eta^n_{j,k}\right)\\
DHUX &= \left(\bar{u}^n_{j,k}{}^{*} Hx1 - \bar{u}^n_{j-1,k}{}^{*} Hx2\right)/\Delta x\\
Hy1 &= \frac{1}{2}\left(h_{j,k} + \eta^n_{j,k} + h_{j,k+1} + \eta^n_{j,k+1}\right)\\
Hy2 &= \frac{1}{2}\left(h_{j,k-1} + \eta^n_{j,k-1} + h_{j,k} + \eta^n_{j,k}\right)\\
DHUY &= \left(\bar{v}^n_{j,k}{}^{*} Hy1 - \bar{v}^n_{j,k-1}{}^{*} Hy2\right)/\Delta y
\end{aligned} \tag{11}
$$

Persamaan momentum arah x:

$$
\begin{aligned}
\bar{u}^{n+1}_{j,k} &= \bar{u}^n_{j,k} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\bar{u}^n_{j,k}\left(\bar{u}^n_{j+1,k} - \bar{u}^n_{j-1,k}\right)\\
&- \frac{\Delta t}{2\Delta y}\bar{v}^{*n}_{j,k}\left(\bar{u}^n_{j,k+1} - \bar{u}^n_{j,k-1}\right) - \frac{g\Delta t}{\Delta x}\left(\eta^{n+1}_{j+1,k} - \eta^{n+1}_{j,k}\right)\\
&+ \Delta t f \bar{v}^{*n}_{j,k} - \frac{\Delta t r \bar{u}^n_{j,k}\sqrt{\left(\left(\bar{u}^n_{j,k}\right)^2 + \left(\bar{v}^{*n}_{j,k}\right)^2\right)}}{Hx_{j,k}}\\
&+ \Delta t A_h\left(\frac{\bar{u}_{j+1,k} + \bar{u}_{j-1,k} - 4\bar{u}_{j,k} + \bar{u}_{j,k+1} + \bar{u}_{j,k-1}}{\Delta x^2}\right)
\end{aligned} \tag{12}
$$

dengan:

$$
\begin{aligned}
\bar{v}^{*n}_{j,k} &= \bar{v}^n_{j,k} + \bar{v}^n_{j-1,k} + \bar{v}^n_{j,k+1} + \bar{v}^n_{j-1,k+1}/4\\
Hx_{j,k} &= \frac{1}{2}\left(h_{j,k} + \eta_{j,k} + h_{j+1,k} + \eta_{j+1,k}\right)
\end{aligned} \tag{13}
$$

Persamaan momentum arah y:

$$
\begin{aligned}
\bar{v}^{n+1}_{j,k} &= \bar{v}^n_{j,k} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\bar{u}^{*n}_{j,k}\left(\bar{v}^n_{j+1,k} - \bar{v}^n_{j-1,k}\right)\\
&- \frac{\Delta t}{2\Delta y}\bar{v}^n_{j,k}\left(\bar{v}^n_{j,k+1} - \bar{v}^n_{j,k-1}\right) - \frac{g\Delta t}{\Delta x}\left(\eta^{n+1}_{j,k+1} - \eta^{n+1}_{j,k}\right)\\
&+ \Delta t f \bar{u}^{*n}_{j,k} - \frac{\Delta t r \bar{v}^n_{j,k}\sqrt{\left(\left(\bar{u}^{*n}_{j,k}\right)^2 + \left(\bar{v}^n_{j,k}\right)^2\right)}}{Hy_{j,k}}\\
&+ \Delta t A_h\left(\frac{\bar{v}_{j+1,k} + \bar{v}_{j-1,k} - 4\bar{v}_{j,k} + \bar{v}_{j,k+1} + \bar{v}_{j,k-1}}{\Delta y^2}\right)
\end{aligned} \tag{14}
$$

dengan:

$$
\begin{aligned}
\bar{u}^{*n}_{j,k} &= \bar{u}^n_{j,k} + \bar{u}^n_{j+1,k} + \bar{u}^n_{j,k-1} + \bar{u}^n_{j+1,k-1}/4\\
Hy_{j,k} &= \frac{1}{2}\left(h_{j,k} + \eta_{j,k} + h_{j,k+1} + \eta_{j,k+1}\right)
\end{aligned} \tag{15}
$$

KESIMPULAN

Persamaan air dangkal berlaku jika kedalaman (vertikal) lebih kecil dari pada skala ketinggiannya (horizontal). Persamaan air dangkal dapat diselesaikan secara numerik terutama dengan menggunakan metode hingga. Persamaan air dangkal diturunkan dari persamaan kontinuitas dan persamaan momentum.

UCAPAN TERIMA KASIH

Ucapan terimakasih kepada Yudi Haditiar atas bantuan penelitian.

REFERENSI

1. Bunya, S., Westerink, J. J. dan Yoshimura. 2005. Discontinuous Boundary Implementation for the Shallow Water Equations. Int. J. Numer. Meth. Fluids. 47: 1451-1468.

2. Kampf Jochen. 2009. Ocean Modelling For Beginners. Springer Heidelberg Dordrecht. London New York.

3. Rezolla, L 2011. Numerical Methods for the Solution of Partial Diferential Equations. Trieste. International Schoolfor Advanced Studies.

4. Natakussumah, K. D., Kusuma, S. B. M., Darmawan, H., Adityawan, B. M. Dan Farid, M. 2007. Pemodelan Hubungan Hujan dan Aliran Permukaan pada Suatu DAS dengan Metode Beda Hingga. ITB Sain dan Tek. 39: 97-123.

5. Casulli, V. dan Walters, A. R. 2000. An unstructured grid, three-dimensional model based on the shallow water equations. Int. J. Numer. Meth. Fluids. 32: 331-348.

6. Triatmodjo, B. 2002. Metode Numerik Beta Offset. Yogyakarta.