MODUL $\tau[M]$-INJEKTIVE

Suprapto[1], Sri Wahyuni[2],
Indah Emilia Wijayanti[2], Irawati[3]

[1]**SMP 1 Banguntapan, Bantul, Yogyakarta**
[1]**Mahasiswa S3 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**
Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta
email : *suprapto_72@yahoo.com*
[2]**Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**
Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta
email : *swahyuni@ugm.ac.id*; *ind_wijayanti@yahoo.com*
[3]**Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**
Institut Teknologi Bandung
email : *irawati@math.itb.ac.id*

Abstract

Let *R* be a ring with unit and let *N* be a left *R*-module. Then *N* is said linearly independent to *R* (or *N* is *R*-linearly independent) if there is monomorphisma $\varphi : R^{(\Lambda)} \longrightarrow N$. By the definition of *R*-linearly independent, we may be able to generalize linearly independent relative to the *R*-module *M*. Module *N* is said *M*-linearly independent if there is monomorphisma $\varphi : M^{(\Lambda)} \longrightarrow N$.

The module *Q* is said *M*-sublinearly independent if *Q* is a factor module of modules which is *M*-linearly independent. The set of modules *M*-sublinearly independent denoted by $\tau[M]$. Can be shown easily that $\tau[M]$ is a subcategory of the category *R*-Mod. Also it can be shown that the submodules, factor modules and external direct sum of modules in $\tau[M]$ is also in the $\tau[M]$.

The module *Q* is called *P*-injective if for any morphisma $f : L \longrightarrow Q$ defined on *L* submodules of *P* can be extended to morphisma $\bar{f} : P \longrightarrow Q$ with $f = \bar{f}i$, where $i : L \longrightarrow P$ is the natural inclusion mapping. The module *Q* is called $\tau[M]$-injective if *Q* is *P*-injective, for all modules *P* in $\tau[M]$.

In this paper, we studiet the properties and characterization of $\tau[M]$-injective. Trait among others that the direct summand of a module that is $\tau[M]$-injective also $\tau[M]$-injective. A module is $\tau[M]$-injective if and only if the direct product of these modules also are $\tau[M]$-injective.

Key words : *Q* ($\tau[M]$)-projective, *P* ($\tau[M]$)-injective.

PENDAHULUAN

Ring *R* yang kita maksud dalam makalah ini adalah ring asosiative ring dengan unit $1 \neq 0$ dan modul yang dimaksud adalah *R*-modul kiri. Diberikan *N* adalah *R*-modul kiri, maka *N* dikatakan linearly independent terhadap *R* (atau *N* adalah *R*-linearly independent) jika terdapat monomorphisma $\varphi : R^{(\Lambda)} \longrightarrow N$. Dari definisi tersebut kita dapat men-generalisasi istilah linearly independent yang relative terhadap *R*-modul *M*. *N* dikatakan *M*-linearly independent jika terdapat monomorphisma $\varphi : M^{(\Lambda)} \longrightarrow N$.

Module *Q* disebut *M*-sublinearly independent jika *Q* adalah modul factor dari modul yang *M*-linearly independent. Himpunan modul-modul yang bersifat *M*-sublinearly independent dinotasikan dengan $\tau[M]$. Dapat ditunjukkan bahwa $\tau[M]$ adalah subkategori dari kategori R-Mod. Lebih jauh bahwa submodul, modul factor dan external direct sum dari modul di dalam $\tau[M]$ juga berada di dalam $\tau[M]$.

Modul Q disebut P-injective jika untuk sebarang morphisma $f : L \longrightarrow Q$ yang didefinisikan pada L submodul dari P dapat diperluas ke morphisma $\bar{f} : P \longrightarrow Q$ dengan $f = \bar{f}i$, dimana $i : L \longrightarrow P$ adalah pemetaan inclusi natural inclusion. Modul Q disebut $\tau[M]$-injective jika Q adalah P-injective, untuk semua modul P di dalam $\tau[M]$.

Dalam makalah ini dibahas sifat-sifat dan karakterisasi dari modul-modul yang $\tau[M]$-injective. Sifat tersebut antara lain bahwa direct summand dari modul yang bersifat $\tau[M]$-injective juga $\tau[M]$-injective. Suatu modul bersifat $\tau[M]$-injective jika dan hanya jika direct product dari modul tersebut juga bersifat $\tau[M]$-injective.

MODUL INJECTIVE

Definisi 2.1. Diberikan P, Q adalah R-modul kiri. Module Q dikatakan P-injective jika untuk sebarang morphisma $f : L \longrightarrow Q$ yang didefinisikan pada L submodul dari P dapat diperluas ke morphisma $\bar{f} : P \longrightarrow Q$ dengan $f = \bar{f}i$, dimana $i : L \longrightarrow P$ adalah pemetaan inclusi natural, atau diagram berikut ini komutative :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & P \arrow[dl, "\bar{f}"] \\
 & Q &
\end{tikzcd}$$

Definisi 2.2. Diberikan P, Q adalah R-modul kiri. Modul P dikatakan Q-projective jika untuk sebarang morphisma $g : P \longrightarrow V$ yang didefinikan pada V modul factor dari Q dapat diperluas ke morphisma $\bar{g} : Q \longrightarrow P$ dengan $g = p\bar{g}$, dimana $p : Q \longrightarrow V$ adalah pemetaan natural, atau diagram berikut ini komutative :

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "\bar{g}"'] \arrow[d, "g"] & \\
Q \arrow[r, "p"'] & V \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Definisi di atas menunjukkan bahwa injectivitas dan projectivitas adalah istilah yang saling dual. Sekarang kita tunjukkan sifat-sifat yang saling berkaitan antara modul injective dan modul projective.

Proposisi 2.3. Diberikan P, Q adalah R-modul kiri.

i. Jika Q adalah P-injective dan setiap submodul dari P adalah Q-projective, maka setiap modul factor dari Q adalah P-injective.

ii. Jika P adalah Q-projective dan setiap modul factor dari Q adalah P-injective, maka setiap submodul dari P adalah Q-projective.

Bukti:

i. Diambil sebarang L submodul dari P dan sebarang V modul factor dari Q. Diberikan morphisma $f : L \longrightarrow V$ dan perhatikan diagram berikut:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & P \\ Q \arrow[r, "p"'] & V \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Karena L adalah Q-projective, maka terdapat morphisma $\bar{f} : L \longrightarrow Q$ yang memenuhi :

$$f = p\bar{f} \qquad \text{………………………………} \qquad (1)$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "\bar{f}"'] & P \\ Q \arrow[r, "p"'] & V \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Juga karena Q adalah P-injective, maka terdapat morphisma $\bar{\bar{f}} : P \longrightarrow Q$ yang memenuhi :

$$\bar{f} = \bar{\bar{f}}i \qquad \text{………………………………} \qquad (2)$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "\bar{f}"'] & P \arrow[dll, "\bar{\bar{f}}"] \\ Q \arrow[r, "p"'] & V \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Dari (1) dan (2) kita peroleh :

$$f = p\bar{f} = p(\bar{\bar{f}}i) = (p\bar{\bar{f}})i.$$

Hal ini berakibat bahwa untuk sebarang morphisma $f : L \longrightarrow V$, terdapat morphisma $p\bar{\bar{f}} : P \longrightarrow V$ yang memenuhi :

$$f = (p\bar{\bar{f}})i\ .$$

Ini berarti *V* adalah *P*-injective.

ii. Diambil sebarang *L* submodul dari *P* dan sebarang *V* modul factor dari *Q*. Diberikan morphisma from $g : L \longrightarrow V$ dan perhatikan diagram berikut :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & P \\
Q \arrow[r, "p"'] & V \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Karena *V* adalah *P*-injective, maka terdapat morphisma $\bar{g} : P \longrightarrow V$ yang memenuhi :

$$g = \bar{g}i \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3)$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & P \arrow[dl, "\bar{g}"] \\
Q \arrow[r, "p"'] & V \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Juga karena *P* adalah *Q*-projective, maka terdapat morphisma $\bar{\bar{g}} : P \longrightarrow Q$ yang memenuhi :

$$\bar{g} = p\bar{\bar{g}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (4)$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"] & P \arrow[dl, "\bar{g}"] \arrow[dll, "\bar{\bar{g}}"'] \\
Q \arrow[r, "p"'] & V \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dari (3) dan (4) kita peroleh :

$$g = \bar{g}i = (p\bar{\bar{g}})i = p(\bar{\bar{g}}i).$$

Hal ini berakibat untuk sebarang morphisma $g : L \longrightarrow V$, terdapat morphisma $\bar{\bar{g}}i : L \longrightarrow Q$ yang memenuhi :

$$g = p(\bar{\bar{g}}i).$$

Ini berarti *L* adalah *Q*-projective. ■

Sekarang kita pelajari mengenai direct sum dari suatu modul. Diberikan $\{Q_i | i \in I\}$ adalah keluarga *R*-modul. Maka notasi $Q = \prod_{i \in I} Q_i$ disebut direct sum kuat atau direct sum lengkap atau direct product dengan asumsi tidak ada komponen atau anggota yang noll. Jika I finite, maka $\prod_{i\in I} Q_i = \bigoplus \sum_i Q_i$.

Proposisi di bawah ini adalah sifat injectivitas direct summand dari suatu modul.

Proposisi 2.4. Diberikan Q, P adalah R-modul kiri. Modul Q adalah P-injective jika dan hanya jika untuk setiap K direct summand dari Q, maka K adalah P-injective.

Bukti:

($\Longrightarrow$) Diambil sebarang L submodul dari P dan sebarang K direct summand dari Q. Diberikan g morphisma $L \longrightarrow Q$ dan perhatikan diagram berikut ini :

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & P & & \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[rr, "i"] & & Q = K\oplus X \arrow[r, "p"] & Q/K \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Karena Q adalah P-injective, maka terdapat morphisma $\bar{g} : P \longrightarrow Q$ yang memenuhi :

$g = \bar{g} i$

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & P \arrow[dl, "\bar{g}"] & & \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[rr, "i"] & & Q = K\oplus X \arrow[r, "p"] & Q/K \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Juga karena K adalah direct summand dari Q, maka terdapat morphisma $\pi : Q \longrightarrow K$ sedemikian sehingga $\pi i = I_K$

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & P \arrow[dl, "\bar{g}"] & & \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[rr, shift left, "i"] & & Q = K\oplus X \arrow[ll, shift left, "\pi"] \arrow[r, "p"] & Q/K \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Ini berarti, untuk setiap morphisma $\pi g : L \longrightarrow K$, terdapat morphisma $\pi \bar{g} : P \longrightarrow K$ yang memenuhi :

$$\pi g = (\pi \bar{g}) i.$$

Dengan kata lain K is P-injective.

$(\Longleftarrow)$ Untuk setiap K submodul dari Q adalah P-injektif, maka Q adalah P-injektif.■

Proposisi 2.5. Diberikan Q_i , P adalah R-modul kiri dan $\{Q_i | i \in I\}$ adalah keluarga dari modul injective. Maka pernyataan berikut ini ekuivalen :

i. $\{Q_i | i \in I\}$ adalah P-injective.

ii. $Q = \prod_{i \in I} Q_i$ adalah P-injective.

Bukti:

$(i \Longrightarrow ii)$ Diambil sebarang L submodul dari P with P dan $Q = \prod_{i \in I} Q_i$ adalah direct product dari Q_i. Diberikan g adalah morphisma $L \longrightarrow Q$ dan perhatikan diagram berikut ini :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] \arrow[dll, "g"'] & P \\
Q = \prod_{i \in I} Q_i \arrow[r, "\pi_j"] & Q_j \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

Karena Q_j adalah P-injective, maka untuk setiap morphisma $\pi_j g : L \longrightarrow Q_j$, terdapat morphisma $\bar{g}_j : P \longrightarrow Q_j$ yang memenuhi :

$$\pi_j \, g = \bar{g}_j \, i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] \arrow[dll, "g"'] & P \arrow[dll, "\bar{g}_j"] \\
Q = \prod_{i \in I} Q_i \arrow[r, "\pi_j"] & Q_j \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

Selanjutnya kita mempunyai product morphisma $\bar{g} : P \longrightarrow Q = \prod_{i \in I} Q_i$ dengan

$$\bar{g}_j = \pi_j \, \bar{g}$$

dan kita memiliki (5), yang berakibat :

$$g = \bar{g} \, i \, .$$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] \arrow[dll, "g"'] & P \arrow[dll, "\bar{g}_j"] \arrow[dlll, "\bar{g}"] \\
Q = \prod_{i \in I} Q_i \arrow[r, "\pi_j"] & Q_j \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

Dengan kata lain $Q = \prod_{i\in I} Q_i$ is *P*-injective.

$(i \Leftarrow ii)$ Diambil sebarang *L* submodul dari *P* dan $Q = \prod_{i\in I} Q_i$ adalah direct product dari Q_i. Diberikan g sebarang morphisma dari $L \longrightarrow Q_k$ dan perhatikan diagram berikut ini :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & P \\ 0 \arrow[r] & Q_k \arrow[r, "\mu_k"] & Q = \prod_{i\in I} Q_i \end{tikzcd}$$

Karena $Q = \prod_{i\in I} Q_i$ adalah *P*-injective, maka untuk setiap morphisma $\mu_k g : L \longrightarrow Q = \prod_{i\in I} Q_i$, terdapat morphisma $\bar{g} : P \longrightarrow Q = \prod_{i\in I} Q_i$ yang memenuhi:

$$\mu_k\, g = \bar{g}\, i \qquad \text{..................................} \qquad (6)$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & P \arrow[d, "\bar{g}"] \\ 0 \arrow[r] & Q_k \arrow[r, "\mu_k"] & Q = \prod_{i\in I} Q_i \end{tikzcd}$$

Selanjutnya kita mempunyai product morphisma $\bar{g}_k : P \longrightarrow Q_k$ dengan

$$\bar{g} = \bar{\mu}_k\, \bar{g}_k$$

dan kita memiliki (6), yang berakibat :

$$g = \bar{g}_k\, i\,.$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & P \arrow[dl, "\bar{g}_k"'] \arrow[d, "\bar{g}"] \\ 0 \arrow[r] & Q_k \arrow[r, "\mu_k"] & Q = \prod_{i\in I} Q_i \end{tikzcd}$$

Dengan kata lain Q_k is *P*-injective. ■

Akibat 2.6. Modul *Q* adalah injective jika dan hanya jika *Q* adalah direct summand dari setiap modul yang memuat *Q*.

MODUL $\tau[M]$-INJECTIVE

Pada bagian ini, kita definisikan $\tau[M]$-injective dan $\tau[M]$-projective modul, serta mempelajari sifat-sifat yang berlaku.

Definisi 3.1. Diberikan *M*, *Q*, *P* adalah *R*-modul kiri.

i. Modul *Q* disebut modul injective jika *Q* adalah *M*-injective, untuk semua modul *M* di dalam *R*-Mod.

ii. Modul *Q* disebut modul $\tau[M]$-injective jika *Q* adalah *P*-injective, untuk semua modul *P* di dalam $\tau[M]$.

Definisi 3.2. Diberikan *M*, *Q*, *P* adalah *R*-modul kiri.

i. Modul *P* disebut modul projective jika *P* adalah *Q*-projective, untuk semua modul *Q* di dalam *R*-Mod.

ii. Modul *P* disebut modul $\tau[M]$-projective jika *P* adalah *Q*-projective, untuk semua modul *Q* di dalam $\tau[M]$.

Berikut ini adalah sifat-sifat injectivitas modul-modul di dalam kategori $\tau[M]$.

Lemma 3.3. Untuk *R*-modul kiri *P* di dalam $\tau[M]$, maka :

i. Jika *P* adalah $\tau[M]$-injective dan setiap submodul dari *Q* adalah *P*-projective untuk sebarang *Q* di dalam $\tau[M]$, maka setiap modul factor dari *P* adalah $\tau[M]$-injective.

ii. Jika *P* adalah $\tau[M]$-projective dan setiap modul factor dari *Q* adalah *P*-injective untuk sebarang *Q* di dalam $\tau[M]$, maka setiap submodul dari *P* adalah $\tau[M]$-projective.

Bukti:

i. Karena $\tau[M]$ adalah subkategori dari kategori *R*-Mod, maka $\tau[M] \subseteq$ *R*-Mod. Jadi setiap sifat yang berlaku di dalam R-Mod pasti berlaku di $\tau[M]$. Dengan mengambil sebarang *V* submodul dari *Q* dan sebarang *L* modul factor dari *P* di dalam $\tau[M]$, maka menurut proposisi 2.3.(*i*), *P* adalah $\tau[M]$-injective.

ii. Dengan mengambil sebarang *K* submodul dari *P* dan sebarang *W* modul factor dari *Q* di dalam $\tau[M]$, maka menurut proposisi 2.3.(*ii*), *P* adalah $\tau[M]$-projective. ■

Proposisi 3.4. Diberikan *R*-modul kiri *P*. Jika *P* adalah $\tau[M]$-injective jika dan hanya jika untuk setiap *V* adalah direct summand dari $Q \in \tau[M]$, maka *K* adalah $\tau[M]$-injective.

Bukti:

Dengan mengambil sebarang *L* submodul dari *P* dan sebarang *V* direct summand dari *Q* di dalam $\tau[M]$, maka menurut proposisi 2.4, *V* adalah $\tau[M]$-injective. ■

Proposisi 3.5. Diberikan *P* adalah *R*-modul kiri di dalam $\tau[M]$ dan $\{Q_i | i \in I\}$ adalah keluarga dari modul injective. Maka pernyataan berikut ini ekuivalen :

i. $\{Q_i | i \in I\}$ adalah $\tau[M]$-injective.

ii. $Q = \prod_{i \in I} Q_i$ adalah $\tau[M]$-injective.

Bukti:

$(i \Longrightarrow ii)$ Dengan mengambil sebarang *L* submodul dari *P* with *P* dan $Q = \prod_{i \in I} Q_i$ adalah direct product dari Q_i di dalam $\tau[M]$, maka menurut proposisi 2.5. $(i \Longrightarrow ii)$, $Q = \prod_{i \in I} Q_i$ adalah $\tau[M]$-injective.

$(i \Longleftarrow ii)$ Dengan mengambil sebarang *L* submodul dari *P* dan $Q = \prod_{i \in I} Q_i$ adalah direct product dari Q_i di dalam $\tau[M]$, maka menurut proposisi 2.5. $(i \Longleftarrow ii)$, $\{Q_i | i \in I\}$ adalah $\tau[M]$-injective. ■

Theorema 3.6. Untuk setiap $Q = N/K \in \tau[M]$. Modul *M* adalah *N*-projective jika dan hanya jika *Q* adalah $M^{(\Lambda)}$-injective.

Bukti:

$(\Longrightarrow)$ Perhatikan diagram di bawah ini:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"'] & M^{(\Lambda)} \\
K \arrow[r] & N \arrow[r, "p"'] & Q=N/K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Karena $Q = N/K \in \tau[M]$, maka terdapat morphisma $\varphi : M^{(\Lambda)} \longrightarrow N$ yang memenuhi :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"'] & M^{(\Lambda)} \arrow[dll, "\bar{\varphi}"] \\
K \arrow[r] & N \arrow[r, "p"'] & Q=N/K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\varphi = p(\bar{\varphi} i)$$

Dengan kata lain: Modul *M* adalah *N*-projective.

$(\Longleftarrow)$ Dari persamaan :

$$\varphi = p(\bar{\varphi} i)$$

Diperoleh :

$\varphi = (p\bar{\varphi})i$

Dengan kata lain Q adalah $M^{(\Lambda)}$-injective. ■

KESIMPULAN

Pada makalah ini telah dibahas modul-modul injective yang dikaitkan dengan modul-modul projective di dalam kategori $\tau[M]$. Telah ditunjukkan pula bahwa sifat injectivitas dan projectivitas modul adalah benar-benar saling dual.

Sifat dasar yang penting ditunjukkan bahwa submodul-submodul yang bersifat projective sangat erat kaitannya dengan modul factor-modul factor yang bersifat injective. Kenyataan ini memberi peluang kepada kita untuk melakukan kajian lebih jauh mengenai herediter modul (submodul-submodul yang bersifat projective) dengan koharediter modul (modul factor-modul factor yang bersifat injective).

DAFTAR PUSTAKA

[1] Adkins, W. And Weintraub, S.H. , 1992, *Algebra*, Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg.
[2] Arifin, A., 2000, *Pengantar Aljabar Abstrak*, Jurusan Matematika, FMIPA, ITB, Bandung.
[3] Anderson, F.W. And Fuller, K.R. , 1992, *Rings and Category of Modules*, 2nd edition, Springer-Verlag.
[4] Beachy, J. A., *M-injective Modules and Prime M-ideals*, Article,----
[5] Bland, P.E., 2011, Ring and Their Modules, Walter de Gruyter, Berlin/New York.
[6] Garminia, H., Astuti, P. , 2006, *Journal of The Indonesian Mathematical Society*, Karakterisasi Modul $\tau[M]$-koherediter, Indonesian Mathematical Society.
[7] Garminia, H., 2009, Struktur Herediter dan Koherediter, Disertasi Program Doktor, Institut Teknologi Bandung.
[8] Hungerford, T.W., 1974, Algebra, Spinger-Verlag, New York – Berlin.
[9] Maclane, S. And Birkhoff, G. , 1979, *Algebra*, MacMillan Publishing CO., INC., New York.
[10] Passman, S. Donald, 1991, *A Course in Ring Theory*, Wadsworth & Brooks, Pacific Grove, California.
[11] Suprapto, dkk, 2009, *On Category of Factor Module of Linearly Independent Modules*, A paper presented in The Research Workshop on Algebra, Gadjah Mada University, Yogyakarta, Indonesia.
[12] Suprapto, dkk, 2011, On $\tau[M]$-Cohereditary Modules, *Jurnal Ilmu Dasar*, FMIPA UNEJ, volume **12** (2): 184-190.
[13] Suprapto, dkk, 2011, *On $\mathcal{M}$-linearly independent Modules*, paper dipresentasikan pada International Conference on Mathematics and Its Applications, SEAMS-GMU, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta, tanggal 12-15 Juli 2011.
[14] Wisbauer, R., 1991, *Foundations of Module and Ring Theory*, University of Dűsseldorf, Germany, Gordon and Breach Science Publishers.