

Mekanisme Seesaw dalam Ruang dengan Dimensi Ekstra

Agus Purwanto*

Laboratorium Fisika Teori dan Filsafat Alam (LaFTiFA),
Jurusan Fisika, FMIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember,
Kampus ITS Sukolilo, Surabaya 60111

Intisari

Mekanisme *seesaw* membangkitkan massa kecil neutrino dengan memperkenalkan neutrino kanan singlet bermassa sangat massif M di dalam model standar dan massa kecil neutrino muncul sebagai massa efektif. Di dalam teori dimensi ruang-waktu ekstra Kaluza-Klein, neutrino dengan massa massif bagi mekanisme seesaw diperoleh secara alamiah yakni dari moda Kaluza-Klein.

KATA KUNCI: neutrino massif, mekanisme seesaw dan dimensi ekstra

I. PENDAHULUAN

Perkembangan menarik di dalam fisika partikel, baik secara teoritis maupun eksperimen, adalah diidentifikasinya osilasi neutrino oleh kolaborasi Super-Kamiokande [1] yang pada gilirannya menyatakan massa tidak nol bagi neutrino. Analisa hasil-hasil eksperimen baik neutrino matahari [2], neutrino atmosferik [3] dan LSND [4] menunjukkan massa neutrino sangat kecil

$$\begin{aligned}\Delta m_{sol}^2 &\approx 3 \times 10^{-6} - 1, 2 \times 10^{-5} eV^2 \\ \Delta m_{atm}^2 &\approx 4 \times 10^{-4} - 5 \times 10^{-3} eV^2 \\ \Delta m_{LSND}^2 &\approx 0, 2 - 2 eV^2\end{aligned}\quad (1)$$

Hasil eksperimen ini meneguhkan kembali fisika di luar model standar karena dalam kerangka model standar, berbeda dari fermion lainnya, neutrino tidak bermassa. Persoalannya adalah bagaimana mekanisme membangkitkan massa kecil neutrino ini tanpa harus merusak model standar yang nota bene telah berhasil baik menjelaskan banyak data eksperimen. Mekanisme paling populer bagi pembangkitan massa sangat kecil neutrino ini adalah mekanisme *seesaw* yakni dengan memperkenalkan neutrino kanan singlet bermassa sangat massif. Neutrino kanan sangat massif ini hanya teramati dalam sektor energi tinggi yakni sekitar skala GUT dan tidak teramati di wilayah energi rendah. Massa sangat berat ini memberi Lagrangian efektif dengan massa neutrino sangat kecil.

Pada saat yang sama, kajian terhadap kemungkinan ruang kita mempunyai lebih dari tiga dimensi ruang beberapa tahun terakhir ini hidup kembali. Sedikitnya ada empat alasan kita memerlukan dimensi ruang-waktu ekstra yaitu unifikasi gravitasi dan interaksi *gauge* bagi partikel elementer, kuantisasi interaksi gravitasi, masalah hirarki massa Higgs, dan masalah

konstanta kosmologi.

Keberadaan dimensi ruang-waktu ekstra tentu membawa implikasi-implikasi fisis yang menarik dan memberi inspirasi untuk melakukan kajian ulang terhadap aneka konsep fisika. Di dalam makalah ini diperlihatkan bagaimana dimensi ekstra lebih spesifiknya dimensi kelima ala Kaluza-Klein (KK) berperan dalam menghadirkan neutrino dengan massa sangat kecil.

II. MODEL SEESAW

A. Suku Massa Model Standar

Model standar bagi elektroweak adalah teori simetri gauge $SU(2) \times U(1)$ dengan medan fermion dan boson vektor tak-bermassa. Massa berasal dari suku interaksi Yukawa

$$\mathcal{L}_Y^q = -\bar{\psi}_{iL} Y_d^{ij} n_{jR} \phi - \bar{\psi}_{iL} Y_u^{ij} p_{jR} \tilde{\phi} + h.c. \quad (2)$$

untuk sektor quark dengan $\tilde{\phi} = i\tau_2 \phi^*$ dan

$$\mathcal{L}_Y^\ell = \bar{\psi}_{\ell iL} Y_e^{ij} \ell_{jR} \phi + h.c. \quad (3)$$

untuk lepton. Y_d, Y_u, Y_ℓ adalah matrik konstanta kopling Yukawa 3×3 ,

$$n_{iR} = \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_R, \quad p_{iR} = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}_R, \quad \psi_{iL} = \begin{pmatrix} \psi_{1L} \\ \psi_{2L} \\ \psi_{3L} \end{pmatrix} \quad (4)$$

dan lepton doublet

$$\psi_{\ell iL} = \begin{pmatrix} \nu_{\ell iL} \\ \ell_{iL} \end{pmatrix}, \quad \ell_i = e, \mu, \tau \quad (5)$$

dan quark doublet

$$\psi_{1L} = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad \psi_{2L} = \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \quad \psi_{3L} = \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}. \quad (6)$$

*E-MAIL: purwanto@physics.its.ac.id;
purwanto.phys@yahoo.com

Perusakan simetri secara spontan dengan nilai ekspektasi vakum boson Higgs

$$\langle \phi \rangle_{vev} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\chi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (7)$$

membangkitkan massa

$$\mathcal{L}_{mass}^q = -\bar{n}_L M_d n_R - \bar{p}_L M_u p_R + h.c. \quad (8)$$

bagi quark dengan $M_{d,u} = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{d,u}$, dan

$$\mathcal{L}_{mass}^\ell = -\bar{\ell}_L M_\ell \ell_R + h.c. \quad (9)$$

bagi lepton dengan $M_\ell = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_\ell$

Berbeda dari fermion sektor quark yang semuanya bermassa fermion sektor lepton hanya elektron, muon dan tauon yang mempunyai massa sedangkan neutrino ν tetap tidak bermassa.

B. Mekanisme Seesaw

Di depan telah disebutkan bahwa dalam sektor energi rendah hanya neutrino kiri ν_L yang muncul. Sekarang andaikan neutrino kanan ν_R ada dan mengingat neutrino adalah anggota famili lepton yang tidak bermuatan maka antipartikel dari neutrino adalah neutrino itu sendiri. Konsekuensinya neutrino adalah partikel Majorana $\nu^c = \nu$ yang dapat mempunyai suku massa umum sebagai berikut

$$\mathcal{L} = -\bar{\nu}_L m_D \nu_R - \frac{1}{2} \bar{\nu}_R^c M \nu_R + h.c. \quad (10)$$

Kita tinjau kasus satu generasi terlebih dulu. Rapat Lagragian (10) dapat ditulis sebagai

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\bar{\nu}_L \ \bar{\nu}_R^c) \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ \nu_R \end{pmatrix} + h.c. \quad (11)$$

Diagonalisasi matriks massa

$$M_\nu = \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & M \end{pmatrix} \quad (12)$$

memberi persamaan sekular $|M_\nu - mI| = 0$ dengan nilai eigen

$$m_{1,2} = \frac{M \pm \sqrt{M^2 + 4m_D^2}}{2} \quad (13)$$

Untuk $M \gg m_D$, maka

$$m_1 \approx M, \quad m_2 \equiv m_\nu \approx -\frac{m_D^2}{M} \quad (14)$$

Tampak bahwa m_ν sangat kecil

Persamaan gerak bagi ν_R dalam limit statik diberikan oleh

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nu_R} = -\bar{\nu}_L m_D - \nu_R^c C^{-1} M = 0 \quad (15)$$

dengan operator konjugasi muatan $C = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^T$

$$\nu_R^T = \bar{\nu}_L m_D M^{-1} C \quad \text{atau} \quad \nu_R = -M^{-1} m_D^T C \bar{\nu}_L^T \quad (16)$$

Substitusi pers.(16) ke dalam pers.(10), dengan $\nu^c = C \bar{\nu}^T$ didapatkan Lagrangian efektif

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\nu}_L m_D M^{-1} m_D^T C \bar{\nu}_L^T \\ &\quad - \frac{1}{2} (-\bar{\nu}_L m_D M^{-1}) C^{-1} M (M^{-1} m_D^T C \bar{\nu}_L^T) + h.c \\ &= \frac{1}{2} \bar{\nu}_L m_D M^{-1} m_D^T C \bar{\nu}_L^T + h.c \\ &= \frac{1}{2} \bar{\nu}_L m_D M^{-1} m_D^T C \nu_L^c + h.c \\ &= \frac{1}{2} \bar{\nu}_L m_\nu \nu_L^c + h.c \end{aligned} \quad (17)$$

dengan

$$m_\nu = -m_D M^{-1} m_D^T \quad (18)$$

Pers.(14) bagi massa kecil neutrino m_ν atau pers.(18) disebut hubungan Seesaw dan mekanisme mendapatkan massa kecil m_ν dengan memperkenalkan massa sangat besar $M \approx 10^{14}$ GeV disebut mekanisme Seesaw [5].

III. DIMENSI EKSTRA

A. Unifikasi dan Masalah Hirarki

Tahun 1919, teori Maxwell bagi medan elektromagnetik merupakan teori yang telah mapan dan teori gravitasi Einstein baru dirumuskan. Sedangkan interaksi inti kuat maupun lemah belum diketahui dengan baik. Karena itu, upaya unifikasi yang ada hanya dilakukan pada kedua interaksi elektromagnetik dan gravitasi. Upaya ini pertama kali dilakukan oleh Theodore Kaluza [6] dengan mempostulatkan satu dimensi ruang-waktu ekstra. Teori Kaluza mampu mendiskripsikan dengan baik bahwa gaya gravitasi dan elektromagnetik mempunyai asal yang sama. Masalahnya, jika dimensi kelima memang ada mengapa kita tidak melihatnya. Masalah ini dijelaskan oleh Oscar Klein [7] dengan mengasumsikan bahwa dimensi kelima mempunyai topologi bundar sedemikian rupa sehingga periodik $0 \leq m z \leq 2\pi$ dengan m adalah invers dari jari-jari lingkaran S^1 . Dengan demikian, unifikasi dapat terjadi dalam ruang dengan dimensi lebih dari empat.

Kembali pada kedua interaksi gravitasi dan elektromagnetik yang telah dikenal baik. Gaya gravitasi antara dua obyek makroskopik yang dipisahkan oleh jarak r memenuhi hukum invers-kuadrat, $F \propto r^{-2}$. Dari eksperimen akselerator kita ketahui bahwa interaksi elektromagnetik dari partikel bermuatan juga memenuhi hukum yang sama, hukum invers-kuadrat.

Tetapi kemampuan eksperimen terbatas dan dengan demikian pengetahuan kita tentang keabsahan hukum alam tersebut. Sebagai contoh, sampai saat ini belum diketahui bagaimana perilaku gaya gravitasi pada jarak kurang dari 10^{-4} cm, atau pada

jarak lebih besar dari 10^{28} cm. Semua yang kita ketahui ialah untuk wilayah $10^{-4} \leq r \leq 10^{28}$ cm hukum invers-kuadrat memberikan deskripsi yang baik mengenai interaksi gravitasi nonrelativistik, tetapi mungkin berbeda untuk wilayah di luar interval tersebut.

Sampai saat ini belum diketahui bagaimana perubahan yang akan terjadi pada hukum invers-kuadrat di atas. Salah satu skenario perubahan tersebut adalah sesuai dengan hukum ruang dimensi tinggi jika dimensi ekstra memang ada. Teori dimensi ekstra ini juga menarik secara eksperimental karena menawarkan skala baru TeV yang bisa dideteksi oleh laboratorium generasi mendatang terdekat.

Dimensi ini secara sederhana difahami tersusun rapi pada manifold beradius kecil dengan ukuran invers skala Planck, $\ell_p = M_{Pl}^{-1}$, karenanya tetap tersembunyi pada energi rendah. Kenyataan menantang yang memotivasi ketertarikan pada penghidupan kembali gagasan ini adalah realisasi kemungkinan dimensi ekstra sebesar milimeter dan masih tersembunyi bagi eksperimen tetapi dengan efek baru yang mungkin dapat diamati dalam waktu dekat. Di antara tanda-tanda eksperimental tersebut adalah penyimpangan hukum Newton pada jarak kecil dan berbagai fenomena fisika penabrak (collider physics). Salah satu keistimewaan yang menyolok dari teori ini adalah solusi alamiah atas masalah hirarki.

Masalah tersebut berupa adanya selang antara skala energi elektrolemah yang merupakan energi maksimum yang dapat dicapai oleh laboratorium yakni sebesar $m_{EW} \approx 10^2$ GeV dan skala unifikasi gaya-gaya $M_{GUT} \approx 10^{16}$ GeV serta skala Planck $M_{Pl} \approx 10^{19}$ GeV. Jika terdapat lebih dari empat dimensi keadaan di atas dapat dimodifikasi secara drastis. Untuk menjelaskan hal tersebut anggap terdapat δ dimensi ruang ekstra yang tertempel dan menjadi elemen alamiah sedemikian rupa sehingga kita hanya merasakan empat dimensi. Selanjutnya anggap bahwa dimensi ini berjari R . Dengan demikian bila dua partikel uji bermassa m_1 dan m_2 dipisahkan oleh jarak $r \gg R$, keduanya akan merasakan potensial gravitasi biasa

$$U(r) = G_N \frac{m_1 m_2}{r} \quad (19)$$

dengan $G_N^{-1} = M_{Pl}^2$. Tetapi bila $r \ll R$, energi potensial keduanya adalah

$$U(r) = G \frac{m_1 m_2}{r^{\delta+1}} \quad (20)$$

dengan $G^{-1} = M^{\delta+2}$ adalah konstanta kopling dari gravitasi di dalam dimensi $4 + \delta$ yang mendefinisikan skala fundamental M yang mana gravitasi menjadi kuat. Persamaan terakhir ini bila diambil sebagai persamaan fundamental maka berimplikasi bahwa skala gravitasi empat dimensi efektif diberikan oleh

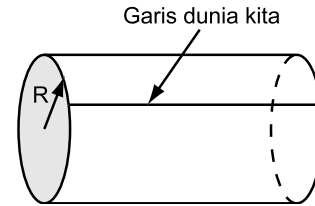
$$M_{Pl}^2 = M^{\delta+2} V_\delta \quad (21)$$

dengan V_δ adalah volume ruang ekstra. Pers.(21) menyatakan bahwa bila volume cukup besar maka skala fundamental dapat menjadi sebesar m_{EW} , dan berarti bahwa hirarki ditiadakan. Untuk $\delta = 2$ dan R kurang dari 1 milimeter kita dapatkan skala fundamental $M \approx 1$ TeV yang akan dapat dijangkau skala energi laboratorium mendatang.

B. Gambaran Kaluza-Klein

Seperti disebutkan di depan, gagasan dimensi ekstra selain empat dimensi dunia kita sesungguhnya merupakan gagasan lama yakni setua pekerjaan dari Kaluza dan Klein di tahun 1920-an. Berikut ini diberikan gagasan dasar dari skenario Kaluza-Klein bagi dimensi ekstra.

Tinjau teori lima dimensional dengan koordinat (x^μ, z) , $\mu = 0, 1, 2, 3$, dan arah z terkompaktifikasi pada lingkaran $2\pi R$ dan mempunyai perioda $z = z + 2\pi R$. Dunia kita (brane), di mana doublet lepton dan medan Higgs berada, terletak di $z = 0$. Partikel lainnya misalkan neutrino kanan seperti yang akan kita bahas nanti dapat bergerak di seluruh bagian ruang. Dengan demikian dunia tiga dimensi x^1, x^2, x^3 kita bagai garis lurus pada silinder panjang tak hingga dengan radius R seperti ilustrasi berikut.



Gambar 1: Garis Dunia

Untuk memperoleh gambaran kongkrit gagasan KK, kita tinjau kasus sederhana yaitu medan skalar tidak bermassa. Dengan menganggap bahwa silinder homogen dan metrik adalah datar, Lagrangian dalam ruang keseluruhan berbentuk

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_A \phi \partial^A \phi, \quad A = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (22)$$

Medan skalar ϕ memenuhi syarat periodik di dalam dimensi ekstra

$$\phi(x, z) = \phi(x, z + 2\pi R) \quad (23)$$

Selanjutnya, ekspansi Fourier bersangkutan

$$\phi(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(x) e^{inz/R} \quad (24)$$

Substitusi pers. (24) ke dalam Lagrangian (22) memberikan

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \left(\partial_\mu \phi_m \partial^\mu \phi_n - \frac{mn}{R^2} \phi_m \phi_n \right) e^{i(m+n)z/R} \quad (25)$$

Aksi bersangkutan

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \int_0^{2\pi R} dz \mathcal{L} \\ &= -\frac{2\pi R}{2} \int d^4x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \partial_\mu \phi_n \partial^\mu \phi_n^* + \left(\frac{n^2}{R^2} \right) \phi_n \phi_n^* \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

Selanjutnya, lakukan redefinisi

$$\varphi_k = \sqrt{2\pi R} \phi_k \quad (27)$$

maka aksi dapat ditulis sebagai

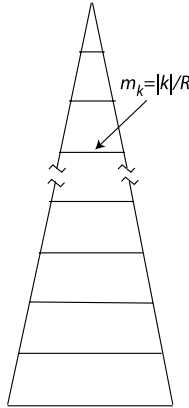
$$S = -\frac{1}{2} \int d^4x \partial_\mu \varphi_0 \partial^\mu \phi_0 - \int d^4x \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \partial_\mu \varphi_n \partial^\mu \varphi_n^* + \left(\frac{n^2}{R^2} \right) \varphi_n \varphi_n^* \right\} \quad (28)$$

Karena itu, spektrum dari teori terkompaktifikasi terdiri dari medan skalar riil tunggal tak bermassa yang disebut *moda nol* φ_0 dan sejumlah tak berhingga medan skalar kompleks massif dengan massa m_k ,

$$m_k = \frac{|k|}{R} \quad (29)$$

Pers.(28) dan (29) memberikan pengertian sebagai berikut. Dari sudut pandang (3+1) dimensional, setiap moda Kaluza-Klein dapat diinterpretasikan sebagai partikel bermassa $m_n = |n|/R$. Setiap medan multidimensional berkaitan dengan satu menara KK dari partikel-partikel empat dimensional dengan massa yang bertambah. Semua keadaan di atas disebut moda KK. Pada temperatur rendah yakni $E \ll 1/R$ hanya moda nol yang penting sedangkan pada energi tinggi $E \gg 1/R$ semua moda KK jadi esensial.

Model dimensi ekstra tipe baru yaitu model ArkaniHamed-



Gambar 2: Menara Kaluza-Klein

Dimopoulos-Dvali [8] dan Randall-Sundrum [9] diperkenalkan. Keduanya dikemukakan untuk mendapatkan solusi baru bagi masalah hirarki. Banyak keistimewaan dari model ini yang diwarisi dari model KK.

IV. MASSA RINGAN TANPA SKALA MASSA BERAT

A. Model dan Kondisi Seesaw

Di dalam model [10] berikut ini, hanya neutrino kanan yang dianggap hidup di dalam dimensi ekstra sedangkan neutrino kiri ν_L tidak. Secara khusus, kita tinjau fermion Dirac lima dimensional tunggal Ψ yang di dalam basis Weyl dapat diuraikan ke dalam dua spinor komponen-dua $\Psi = (\psi_1 \ \psi_2)^T$. Kita tetapkan juga kondisi $\psi_{1,2}(-z) = \pm \psi_{1,2}(z)$ yang mana z adalah koordinat dimensi kelima. Asumsi bahwa dunia kita (brane) terletak di titik tetap *orbifold* $y = 0$ tampak bahwa ψ_2 lenyap di dunia kita dan kopling paling alamiah adalah antara ν_L dan ψ_1 . Bentuk aksi lima dimensional paling umum dari model dengan ketentuan di atas diberikan oleh

$$S = \int d^4x dz M_s \left\{ \bar{\psi}_1 i \bar{\sigma}^A \partial_A \psi_1 + \bar{\psi}_2 i \bar{\sigma}^A \partial_A \psi_2 + \frac{1}{2} M_0 (\psi_1 \psi_1 + \psi_2 \psi_2 + h.c.) \right\} + \int d^4x \left\{ \bar{\nu}_L i \bar{\sigma}^\mu D_\mu \nu_L + (m \nu_L \psi_1|_{z=0} + h.c.) \right\} \quad (30)$$

dengan massa Majorana M_0 bagi Ψ .

Selanjutnya untuk kompaktifikasi ke dimensi empat kita ekspansi medan Ψ lima dimensional ke dalam moda KK. Hubungan *orbifold*, $\psi_{1,2}(-z) = \pm \psi_{1,2}(z)$ mempunyai implikasi bahwa uraian KK medan bersangkutan mempunyai bentuk

$$\psi_1(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_1^{(n)}(x) \cos(nz/R) \\ \psi_2(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_2^{(n)}(x) \sin(nz/R) \quad (31)$$

Substitusi ekspansi (31) ke dalam aksi (30) didapatkan aksi empat dimensional

$$S = \int d^4x \left\{ \bar{\nu}_L i \bar{\sigma}^\mu D_\mu \nu_L + \bar{\psi}_1^{(0)} i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_1^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\bar{N}^{(n)} i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu N^{(n)} + \bar{M}^{(n)} i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu M^{(n)} \right) + \left(\frac{1}{2} M_0 \psi_1^{(0)} \psi_1^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(M_0 + \frac{n}{R} \right) N^{(n)} N^{(n)} + \left(M_0 - \frac{n}{R} \right) M^{(n)} M^{(n)} \right] + m \nu_L \psi_1^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(m_N^{(n)} \nu_L N^{(n)} + m_M^{(n)} \nu_L M^{(n)} \right) + h.c. \right\} \quad (32)$$

dengan kombinasi linier

$$\begin{aligned} N^{(n)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1^{(n)} + \psi_2^{(n)}) \\ M^{(n)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1^{(n)} - \psi_2^{(n)}), \quad n > 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Selanjutnya, bila suku massa aksi (32) ditulis dalam bentuk

$$\mathcal{L}_{mass} = \frac{1}{2} \mathcal{N} \mathcal{M} \mathcal{N}^T + h.c. \quad (34)$$

dengan

$$\mathcal{N}^T = (\nu_L, \psi^{(0)}, N^{(1)}, M^{(1)}, N^{(2)}, M^{(2)}, \dots) \quad (35)$$

maka matriks massa bersangkutan berbentuk

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & m & m_N^{(1)} & m_M^{(1)} & m_N^{(2)} & m_M^{(2)} & \dots \\ m & M_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ m_N^{(1)} & 0 & M_0 + \frac{1}{R} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ m_M^{(1)} & 0 & 0 & M_0 - \frac{1}{R} & 0 & 0 & \dots \\ m_N^{(2)} & 0 & 0 & 0 & M_0 + \frac{2}{R} & 0 & \dots \\ m_M^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & M_0 - \frac{2}{R} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (36)$$

dengan

$$\begin{aligned} m_N^{(n)} &= m (\cos(ny/R) + \sin(ny/R)) \\ m_M^{(n)} &= m (\cos(ny/R) - \sin(ny/R)) \end{aligned} \quad (37)$$

Untuk $M_0 = 0$, persamaan nilai eigen

$$\begin{aligned} |\mathcal{M} - \lambda I| &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(\lambda^2 - \left(\frac{k}{R} \right)^2 \right) \left(\lambda^2 - m^2 - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\lambda^2 (m_N^{(l)2} + m_M^{(l)2}) + \frac{l\lambda}{R} (m_N^{(l)2} - m_M^{(l)2})}{\lambda^2 - \left(\frac{l}{R} \right)^2} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (38)$$

Dari persamaan di atas tampak bahwa persamaan simetrik terhadap operasi $\lambda \rightarrow -\lambda$ jika $m_N^{(l)} = m_M^{(l)}$ dan ini berarti bahwa mekanisme seesaw lenyap antara nilai eigen positif dan negatif. Karena itu

$$m_N^{(l)2} - m_M^{(l)2} \neq 0 \quad (39)$$

merupakan kondisi bagi mekanisme seesaw.

B. Massa Neutrino

Untuk mendapatkan gambaran riil mekanisme seesaw dari moda KK kita tinjau kasus $m_N^{(l)} = m$, $m_M^{(i)} = 0$. Lagrangian

yang relevan dengan bahasan lebih lanjut berbentuk

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\nu}_L i \bar{\sigma}^\mu D_\mu \nu_L + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{N}^{(n)} i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu N^{(n)} \\ &+ \left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{R} N^{(n)} N^{(n)} + m \sum_{n=1}^{\infty} \nu_L N^{(n)} + h.c. \right) \end{aligned} \quad (40)$$

Jelas, kasus ini memenuhi kondisi seesaw (39). Penulisan kembali Lagrangian massa sebagaimana (35) dengan

$$\mathcal{N}^T = (\nu_L, N^{(0)}, N^{(1)}, N^{(2)}, \dots) \quad (41)$$

memberikan matriks massa

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & m & m & m & m & \dots \\ m & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ m & 0 & \frac{1}{R} & 0 & 0 & \dots \\ m & 0 & 0 & \frac{2}{R} & 0 & \dots \\ m & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{R} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (42)$$

Matriks massa ini memberi persamaan sekular

$$0 = |\mathcal{M} - \mu I| = \prod_{k=1}^N \left(\frac{k}{R} - \mu \right) \left\{ \mu^2 - m^2 + \mu m^2 \sum_{i=1}^i \frac{1}{R - \mu} \right\} \quad (43)$$

Nilai eigen terkait dengan mekanisme seesaw, untuk N besar sekali, mempunyai bentuk

$$\mu_{1,2} \approx \begin{cases} -m^2 R \ln N \\ \frac{1}{R \ln N} \end{cases} \quad (44)$$

Bandingkan pers.(44) dengan pers.(14) didapatkan massa massif neutrino Majorana konvensional disubstitusi oleh $-m^2 R \ln N$. Sedangkan massa kecil neutrino diberikan oleh $\frac{1}{R \ln N}$.

V. KESIMPULAN

Di dalam mekanisme seesaw konvensional neutrino Majorana massif ditambahkan begitu saja (by hand) ke dalam Lagrangian model standar. Neutrino ini tidak teramati di wilayah energi rendah karena massanya di sekitar massa GUT. Di dalam konteks dimensi ekstra peran neutrino massif ini diambil oleh partikel alamiah yang hidup di dalam dimensi ekstra dan mempunyai massa $m_k = \frac{|k|}{R}$.

Ucapan terimakasih

Makalah ini penulis dedikasikan kepada Prof. Tjia May On dan Dr. Hans J. Wospakriek (alm) yang telah mengan-

tar penulis untuk memasuki dan menekuni fisika teoritis, juga meneladankan bagaimana menjadi *ilmuwan sejati* di tengah masyarakat yang tidak menghargai ilmu pengetahuan. Penulis sampaikan ungkapan terimakasih pada Anwari Fundamental Sciences Foundation (AFSIF) yang mendukung dana bagi penelitian ini.

LAMPIRAN A: DETERMINAN MATRIKS MASSA

Berikut ini diberikan perhitungan rinci matriks massa. Perhatikan matriks $n \times n$ B ,

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}. \quad (A1)$$

Determinan matriks B menurut definisi diberikan oleh

$$\det B = |B| = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} b_{ij} \bar{B}_{ij} \quad (A2)$$

dengan \bar{B}_{ij} adalah minor b_{ij} dari determinan B . Selanjutnya, terapkan rumusan di atas pada matriks khusus M dengan bentuk

$$M = \begin{pmatrix} z & y_0 & y_1 & \dots & y_n \\ x_0 & a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ x_1 & a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & \mathbf{y}^T \\ \mathbf{x} & A \end{pmatrix} \quad (A3)$$

Ekspansi determinan terhadap suku-suku minor(A2) pada matriks M memberikan bentuk sederhana seperti berikut,

$$\begin{aligned}
 \det M &= z|A| - y_0 \begin{vmatrix} x_0 & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ x_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + y_1 \begin{vmatrix} x_0 & a_{00} & \cdots & a_{0n} \\ x_1 & a_{10} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & a_{n0} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n-1} y_n \begin{vmatrix} x_0 & a_{00} & \cdots & a_{0n-1} \\ x_1 & a_{10} & \cdots & a_{1n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & a_{n0} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix} \\
 &= z|A| - y_0 \left\{ x_0 \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - x_1 \begin{vmatrix} a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n-1} x_n \begin{vmatrix} a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n} \end{vmatrix} \right\} \\
 &\quad + \cdots + (-1)^{n-1} y_n \left\{ x_0 \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix} - x_1 \begin{vmatrix} a_{01} & \cdots & a_{0n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix} \right. \\
 &\quad \left. + \cdots + (-1)^{n-1} x_n \begin{vmatrix} a_{01} & \cdots & a_{0n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{vmatrix} \right\} \\
 &= z|A| - \{x_0 y_0 \bar{A}_{00} - x_0 y_1 \bar{A}_{01} + \cdots + (-1)^n x_0 y_n \bar{A}_{0n}\} - \{-x_1 y_0 \bar{A}_{10} + x_1 y_1 \bar{A}_{11} + \cdots + (-1)^{n+1} x_1 y_n \bar{A}_{1n}\} \\
 &\quad + \cdots - \{(-1)^n x_n y_0 \bar{A}_{n0} + (-1)^{n+1} x_n y_1 \bar{A}_{n1} + \cdots + x_n y_n \bar{A}_{nn}\} \\
 &= z|A| - \sum_{ij} (-1)^{i+j} x_i \bar{A}_{ij} y_j \tag{A4}
 \end{aligned}$$

LAMPIRAN B: NILAI EIGEN SEESAW

dan minor

Perhatikan matriks

$$\mathcal{M} - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & m & m & m & m & \cdots \\ m & -\lambda & & & & \\ m & & \frac{1}{R} - \lambda & & & \\ m & & & \frac{2}{R} - \lambda & & \\ m & & & & \frac{3}{R} - \lambda & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{B1}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{A}_{ii} &= \frac{|A|}{\frac{i}{R} - \lambda} \\
 &= \frac{-\lambda \prod_{k=1}^k \left(\frac{k}{R} - \lambda\right)}{\frac{i}{R} - \lambda} \tag{B4}
 \end{aligned}$$

Bandingkan matriks $\mathcal{M} - \lambda I$ dengan matriks (A3) maka $z = -\lambda$, $x_i = y_i = m$, $A_{ij} = A_{ii} \delta_{ij}$ sehingga pers. (A4) menjadi

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M} - \lambda I| &= z|A| - \sum_{ij} (-1)^{i+j} x_i \bar{A}_{ii} \delta_{ij} y_j \\
 &= z|A| - \sum_{i=0}^N x_i^2 \bar{A}_{ii} \\
 &= -\lambda |A| - m^2 \sum_{i=0}^N \bar{A}_{ii} \tag{B2}
 \end{aligned}$$

dengan determinan matriks A untuk kasus khusus kita

$$|A| = -\lambda \prod_{k=1}^k \left(\frac{k}{R} - \lambda\right) \tag{B3}$$

Dengan demikian ungkapan lengkap determinan dierikan oleh bentuk berikut

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M} - \lambda I| &= \lambda^2 \prod_{k=1}^k \left(\frac{k}{R} - \lambda\right) - m^2 \prod_{k=1}^k \left(\frac{k}{R} - \lambda\right) \\
 &\quad - m^2 \sum_{i=1}^N \frac{-\lambda \prod_{k=1}^k \left(\frac{k}{R} - \lambda\right)}{\frac{i}{R} - \lambda} \\
 &= \prod_{k=1}^k \left(\frac{k}{R} - \lambda\right) \left\{ \lambda^2 - m^2 + \lambda m^2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{\frac{i}{R} - \lambda} \right\} \\
 &= 0 \tag{B5}
 \end{aligned}$$

Uraianya

$$\begin{aligned}
 0 &= \left(\frac{1}{R} - \lambda\right) \left(\frac{2}{R} - \lambda\right) \cdots \left(\frac{N}{R} - \lambda\right) (\lambda^2 - m^2) \\
 &+ m^2 \lambda \prod_{k=1}^N \left(\frac{k}{R} - \lambda\right) \sum_{i=1}^N \frac{1}{\frac{i}{R} - \lambda} \\
 &= \left\{ -\frac{m^2 N!}{R^N} + m^2 \lambda \prod_{k=1}^N \left(\frac{k}{R}\right) \sum_{j=1}^N \left(\frac{R}{j}\right) + \cdots \right. \\
 &\quad \left. + (-1)^{N-1} \lambda^{N+1} \left(\frac{1}{R} + \frac{2}{R} + \cdots + \frac{N}{R}\right) + (-1)^N \lambda^{N+2} \right\} \\
 &+ m^2 \lambda \{ \lambda_2 \lambda_3 \cdots \lambda_N + \cdots + \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{N-1} \} \\
 &= -\frac{m^2 N!}{R^N} + 2m^2 \lambda \prod_{k=1}^N \left(\frac{k}{R}\right) \sum_{j=1}^N \left(\frac{R}{j}\right) + \cdots \\
 &\quad + (-1)^{N-1} \lambda^{N+1} \sum_{k=1}^N \left(\frac{k}{R}\right) + (-1)^N \lambda^{N+2} \\
 &= C_0 + C_1 \lambda + \cdots + C_{N+1} \lambda^{N+1} + C_{N+2} \lambda^{N+2}
 \end{aligned}
 \tag{B6}$$

Kita dapatkan koefisien-koefisien C_k ,

$$\begin{aligned}
 C_0 &= -\frac{m^2 N!}{R^N} \\
 C_1 &= 2m^2 \prod_{k=1}^N \left(\frac{k}{R}\right) \sum_{j=1}^N \left(\frac{R}{j}\right) \\
 &\quad \vdots \\
 C_{N+1} &= (-1)^{N-1} \sum_{k=1}^N \left(\frac{k}{R}\right) \\
 C_{N+2} &= (-1)^N
 \end{aligned}
 \tag{B7}$$

Di sisi lain, pers.(B5) dapat ditulis dan diuraikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 0 &= \prod_{k=1}^N (\lambda_k - \lambda) (\lambda_+ - \lambda) (\lambda_- - \lambda) \\
 &= (\lambda_1 - \lambda) (\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_+ - \lambda) (\lambda_- - \lambda) \\
 &= \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_N \lambda_+ \lambda_- \\
 &\quad - \lambda \{ \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_N \lambda_+ + \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_N \lambda_- \\
 &\quad + \lambda_+ \lambda_- (\lambda_1 \cdots \lambda_{N-1} + \cdots + \lambda_2 \cdots \lambda_N) \} \\
 &\quad + \cdots + (-1)^{N+1} \lambda^{N+1} (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_N + \lambda_+) \\
 &\quad + (-1)^{N+2} \lambda^{N+2} \\
 &= \prod_{k=1}^N (\lambda_k) \lambda_+ \lambda_- \\
 &\quad - \lambda \prod_{k=1}^N \lambda_k \left\{ \lambda_+ + \lambda_- + \left(\sum_{l=1}^N \frac{1}{\lambda_l} \right) \lambda_+ \lambda_- \right\} \\
 &\quad + \cdots + (-1)^{N+1} \lambda^{N+1} \left\{ \lambda_+ + \lambda_- + \sum_{l=1}^N \lambda_l \right\} \\
 &\quad + (-1)^{N+2} \lambda^{N+2}
 \end{aligned}
 \tag{B8}$$

Penulisan ke dalam ekspansi (B6) memberikan Kita koefisien-koefisien C_k

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \prod_{k=1}^N (\lambda_k) \lambda_+ \lambda_- \\
 -C_1 &= \prod_{k=1}^N \lambda_k \left\{ \lambda_+ + \lambda_- + \left(\sum_{l=1}^N \frac{1}{\lambda_l} \right) \lambda_+ \lambda_- \right\} \\
 &\quad \vdots \\
 C_{N+1} &= (-1)^{N+1} \left\{ \lambda_+ + \lambda_- + \sum_{l=1}^N \lambda_l \right\} \\
 C_{N+2} &= (-1)^{N+2}
 \end{aligned}
 \tag{B9}$$

Selanjutnya, asumsikan bahwa $mR \ll 1$, λ_l dapat diekspansikan sebagai

$$\lambda_l = \frac{l}{R} + \frac{m^2 R}{l} + \cdots
 \tag{B10}$$

Dengan demikian, membandingkan dua ungkapan koefisien C_k didapatkan i) dari C_0

$$\begin{aligned}
 \lambda_+ \lambda_- &= C_0 \left(\prod_{k=1}^N \lambda_k \right)^{-1} \\
 &= -\frac{m^2 N!}{R^N} \prod_{k=1}^N \left(\frac{1}{R} + \frac{m^2 R}{l} + \cdots \right)^{-1} \\
 &= -m^2 \prod_{k=1}^N \left(1 + \frac{m^2 R^2}{l^2} + \cdots \right)^{-1} \\
 &= -m^2 \left(1 + m^2 R^2 \sum_{l=1}^N \frac{1}{l^2} + \cdots \right)^{-1} \\
 &\approx -m^2
 \end{aligned}
 \tag{B11}$$

ii) dari C_1

$$\begin{aligned}
 \lambda_+ + \lambda_- &= -C_1 \left(\prod_{k=1}^N \lambda_k \right)^{-1} - \left(\sum_{l=1}^N \frac{1}{\lambda_l} \right) \lambda_+ \lambda_- \\
 &= -2m^2 \prod_{k=1}^N \left(\frac{k}{R}\right) \sum_{j=1}^N \left(\frac{R}{j}\right) \left(\prod_{k=1}^N \lambda_k \right)^{-1} \\
 &\quad + m^2 \left(\sum_{l=1}^N \frac{1}{\lambda_l} \right) \\
 &\approx -m^2 R \sum_{l=1}^N \frac{1}{l}
 \end{aligned}
 \tag{B12}$$

Hasil ini juga dapat diperoleh dari penyamaan koefisien C_{N+1} .

Dari dua hasil λ_+ , λ_- di depan

$$\begin{aligned}
 0 &= (\lambda - \lambda_+) (\lambda - \lambda_-) \\
 &= \lambda^2 - \lambda(\lambda_+ + \lambda_-) + \lambda_+ \lambda_-
 \end{aligned}
 \tag{B13}$$

dapat diperoleh dua akar yang tidak lain adalah nilai eigen

Untuk limit $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{\lambda_+ + \lambda_- \pm \sqrt{(\lambda_+ + \lambda_-)^2 - \lambda_+ \lambda_-}}{2} \\ &= \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4m^2}}{2} \end{aligned} \quad (\text{B14})$$

dengan

$$\mu = -m^2 R \sum_{l=1}^N \frac{1}{l} \quad (\text{B15})$$

$$\mu = -m^2 R \sum_{l=1}^N \frac{1}{l} \approx -m^2 R \ln N. \quad (\text{B17})$$

Untuk kasus $\mu \gg m$, didapatkan

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{\mu \pm \mu \sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \mu \pm \mu \left(1 + \frac{2m^2}{\mu^2} + \dots \right) \right\} \\ &\approx \begin{cases} \mu \\ -m^2/\mu \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B16})$$

-
- [1] Y. Fukuda, et al, Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 1562; Phys. Lett. **B436** (1998) 33.
 - [2] J. Bahcall, P. Krastev dan A. Smirnov, Phys. Rev. **D58** (1998) 096016.
 - [3] M.C. Gonzalez-Garcia dkk., Phys. Rev. **D58** (1998) 033004.
 - [4] C. Athanassopoulos dkk., Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 2650; Phys. Rev. **C58** (1998) 2489.
 - [5] M. Gell-Mann, P. Ramond, R. Slansky: in *Supergravity*, ed. P. van Nieuwenhuizen and D. Z. Freedman, North Holland, 1979.
T. Yanagida: in Proceedings of *Workshop on Unified Theory and Baryon Number in the Universe*, ed. O. Sawada and A. Sugamoto, KEK, 1979.
 - [6] T. Kaluza, in *An Introduction to Kaluza-Klein Theories*, transl. by T. Muta, World Scientific, Singapore, 1984.
 - [7] O. Klein, in *An Introduction to Kaluza-Klein Theories*, transl. by T. Muta, World Scientific, Singapore, 1984.
 - [8] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, Phys. Lett. **B429** (1998) 263.
 - [9] L. Randal and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3370.
 - [10] K.R. Dienes, E. Dudas and T. Gherghetta, Nucl. Phys. **B557** (1999) 25.