

# ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMAL MODEL LESLIE-GOWER FUNGSI RESPON HOLLING III DENGAN PEMANENAN PADA POPULASI *PREDATOR DAN PREY*

Febriyanti Himmatul Ulya<sup>1)</sup>, Syamsuddin Toaha<sup>2)</sup>, Kasbawati<sup>3)</sup>

## Abstract

This article modified the leslie-gower model on harvesting with predator and prey population. This study aims at construct a modification of leslie-gower model with holling III response function. In addition, there is an effort harvesting in predator and prey population, analyzing an equilibrium point, finding bionomic equilibrium and the condition where the present value is maximum from net income by controlling harvesting in both populations. In the modified leslie-gower model there is an equilibrium point  $T_2(x_2^*, y_2^*)$  which is asymptotically stable and when there have harvesting, the equilibrium point  $H_2(x_4^*, y_4^*)$  is also asymptotically stable. Bionomic equilibrium from harvesting on the modified leslie-gower model  $P(x_\infty, y_\infty, E_\infty)$  is maximizing the profit function  $\pi$  of harvesting on a model with the maximum pontryagin principle resulting an optimal equilibrium  $(x_\delta, y_\delta, E_\delta)$  affected by instantaneous rate of discount  $\delta$ .

**Keywords:** leslie-gower, holling III, bionomic equilibrium, maximum pontryagin policy

## Abstrak

Pada artikel ini penelitian yang dilakukan adalah memodifikasi model leslie-gower dengan pemanenan pada populasi *predator* dan *prey*. Penelitian ini bertujuan merekonstruksi modifikasi model leslie-gower dengan menggunakan fungsi respon holling III serta terdapat upaya pemanenan pada populasi *predator* dan *prey*, menganalisis titik kesetimbangan, menentukan kesetimbangan bionomik dan kondisi yang dapat memaksimalkan nilai *present value* dari pada pendapatan bersih dengan mengontrol pemanenan pada kedua populasi. Pada modifikasi model leslie-gower terdapat sebuah titik kesetimbangan  $T_2(x_2^*, y_2^*)$  bersifat stabil asimtotik dan saat terdapat pemanenan titik kesetimbangan  $H_2(x_4^*, y_4^*)$  bersifat stabil asimtotik. Kesetimbangan bionomik dari pemanenan yang dilakukan pada modifikasi model leslie-gower  $P(x_\infty, y_\infty, E_\infty)$ , memaksimalkan fungsi keuntungan  $\pi$  dari pemanenan yang dilakukan pada model dengan prinsip maksimum pontryagin menghasilkan kesetimbangan optimal  $(x_\delta, y_\delta, E_\delta)$  yang dipengaruhi diskonto  $\delta$ .

**Kata kunci:** leslie-gower, holling III, kesetimbangan bionomik, prinsip maksimum pontryagin.

<sup>1)2)3)</sup>Universitas Hasanuddin, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,  
Jalan Perintis Kemerdekaan, Makassar.

<sup>1)</sup>febrii8293@gmail.com, <sup>2)</sup>syamsuddint@yahoo.com, <sup>3)</sup>kasbawati@gmail.com

## 1. Pendahuluan

Banyak model *predator-prey* yang digunakan untuk menggambarkan interaksi *predator-prey* antara lain model lotka-volterra. Gause (1934) mengalami kegagalan untuk menggambarkan laju pertumbuhan kedua populasi yang diperolehnya dengan model lotka-volterra dan leslie (1948) dapat memperoleh model yang merepresentasikan data pertumbuhan yang diperoleh oleh Gause (Berryman, 1992). Dalam memangsa, *predator* menghabiskan waktu dalam mencari dan berinteraksi dengan *prey* dan *predator* memiliki kapasitas terbatas dalam memangsa. Jumlah populasi *prey* mempengaruhi respon *predator* dalam memangsa disebut fungsi respon predasi. Terdapat tiga tipe fungsi respon yang dikemukakan holling. Fungsi respon holling I terjadi pada *predator* yang bersifat pasif seperti laba-laba. Fungsi respon holling II terjadi pada *predator* yang bersifat aktif dan *predator* membutuhkan waktu dalam mencerna *prey*, seperti yang dilakukan serigala. Pada fungsi respon holling III, *predator* akan selektif memilih *prey* ketika jumlah *prey* tinggi dan akan mencari alternatif *prey* memangsa ketika kepadatan *prey* tersebut rendah.

Populasi *predator* dan *prey* dengan nilai ekonomi memiliki kemungkinan untuk dipanen. Laju pertumbuhan *predator* dan *prey* yang dipengaruhi oleh banyaknya jumlah populasi yang dipanen. Jika hasil pemanenan yang dilakukan memperoleh keuntungan, pemanen cenderung melakukan pemanenan sebanyak-banyaknya agar mendapatkan keuntungan yang maksimal. Pemanenan populasi yang terus menerus tanpa mempertimbangan jumlah populasi dapat mengakibatkan kelangkaan atau kepunahan dan bahkan tidak dapat dilakukan pemanenan secara berkelanjutan.

Sharma, dkk (2014) menganalisis dinamika pemanenan kedua spesies tersebut. Model laju pertumbuhan populasi disusun berdasarkan perilaku interaksi antara phytoplankton dan zooplankton. Sharma, dkk menggunakan prinsip maksimum pontryagin untuk menentukan kebijakan optimal untuk hasil maksimum dan pemanenan dapat dilakukan secara berkelanjutan. Penelitian lain tentang model ekologi juga dilakukan oleh Yue (2016). Yue membahas dinamika model leslie-gower dengan fungsi respon holling II.

## 2. Model Matematika

Leslie (1948) memperkenalkan model *predator-prey* dengan kompetisi intraspesifik, sehingga diperoleh model sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= r_1x - bx^2 - a_1xy, \\ \frac{dy}{dt} &= r_2y - \frac{a_2y^2}{x}\end{aligned}\quad (1)$$

Model leslie-gower memiliki asumsi bahwa *carrying capacity predator* dipengaruhi oleh kepadatan *prey*, yaitu

$$\frac{dy}{dt} = r_2y - \frac{y^2}{c} \quad (2)$$

dengan  $C = lx$  sebagai *carrying capacity* dari *predator* yang sebanding dengan jumlah *prey* dan  $l$  merupakan koefisien konversi *prey* menjadi *predator*, sehingga persamaan (2) menjadi:

$$\frac{dy}{dt} = r_2y - \frac{y^2}{lx} \quad (3)$$

dan bentuk  $\frac{y}{lx}$  diasumsikan sebagai hilangnya *predator* karena kelangkaan *prey* utama. Kelangkaan pada *prey* dapat merangsang *predator* untuk mencari alternatif *prey* lain, namun

pertumbuhannya tetap memiliki batas (*carrying capacity*), sehingga ditambahkan konstanta positif  $d$  karena *predator* tidak bergantung pada *prey* tunggal, sehingga menjadi,

$$\frac{dy}{dt} = r_2y - \frac{y^2}{lx+d} \quad (4)$$

dengan  $a_2 = \frac{1}{l}$ ,  $k_2 = \frac{d}{l}$  dan fungsi respon holling III sebagai fungsi respon predasi, maka model (1) menjadi,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= r_1x - bx^2 - \frac{a_1x^2y}{x^2+k_1}, \\ \frac{dy}{dt} &= r_2y - \frac{a_2y^2}{x+k_2} \end{aligned} \quad (5)$$

Terdapat upaya pemanenan  $E(t)$  terhadap *predator* dan *prey* yang memiliki nilai ekonomi, sehingga dilakukan pada kedua populasi tersebut, sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= r_1x - q_1Ex - bx^2 - \frac{a_1x^2y}{x^2+k_1}, \\ \frac{dy}{dt} &= r_2y - q_2Ey - \frac{a_2y^2}{x+k_2} \end{aligned} \quad (6)$$

Parameter  $r_1, r_2, b, a_1, a_2, k_1$  dan  $k_2$  bernilai positif dengan  $r_1$  dan  $r_2$  merupakan laju pertumbuhan intrinsik dari *prey* dan *predator*,  $b$  merupakan laju interkasi antar prey,  $a_1$  Laju pemangsaan dari predator,  $a_2$  merupakan laju interaksi antar predator,  $k_1$  adalah *half saturation constant* dari *prey*,  $k_2$  adalah perlindungan terhadap *predator* oleh lingkungan dan  $E$  pemanenan yang dilakukan terhadap *predator* dan *prey*. Dari model (5), diperoleh dua titik kesetimbangan non feasible  $(0,0)$ ,  $(0, \frac{r_2k_2}{a_2})$ , sebuah titik kesetimbangan yang bersifat tidak stabil  $T_1(x_1^*, 0)$  dan sebuah titik kesetimbangan yang bersifat stabil asimtotik  $T_2(x_2^*, y_2^*)$  dengan  $r_1 + r_2 < 2bx_2^* + \frac{2a_1x_2^*y_2^*}{x_2^{*2}+k_1} - \frac{2a_1x_2^{*3}y_2^*}{(x_2^{*2}+k_1)^2} + \frac{2a_2y_2^*}{x_2^*+k_2}$  dan  $r_1 < 2bx +$

$\frac{2a_1xy}{x^2+k_1} - \frac{2a_1x^3y}{(x^2+k_1)^2}$ ,  $r_2 < \frac{2a_2y_2^*}{x_2^*+k_2}$  atau  $r_1 > 2bx_2^* + \frac{2a_1x_2^*y_2^*}{x_2^{*2}+k_1} - \frac{2a_1x_2^{*3}y_2^*}{(x_2^{*2}+k_1)^2} + \frac{2a_2y_2^*}{x_2^*+k_2}$ ,  $r_2 > \frac{2a_2y_2^*}{x_2^*+k_2}$ . Pada model (6)

erdapat dua titik kesetimbangan non feasible  $(0,0)$ ,  $(0, \frac{k_2(r_2-q_2E)}{a_2})$ , sebuah titik kesetimbangan yang bersifat tidak stabil  $H_1(x_3^*, 0)$  dan sebuah titik kesetimbangan yang bersifat stabil asimtotik dengan

$r_1 + r_2 < 2bx_4^* + \frac{2a_1x_4^*y_4^*}{x_4^{*2}+k_1} - \frac{2a_1x_4^{*3}y_4^*}{(x_4^{*2}+k_1)^2} + \frac{2a_2y_4^*}{x_4^*+k_2} + q_1E + q_2E$  dan  $r_1 < \left( 2bx_4^* + q_1E + \frac{2a_1x_4^*y_4^*}{x_4^{*2}+k_1} - \frac{2a_1x_4^{*3}y_4^*}{(x_4^{*2}+k_1)^2} \right)$ ,  $r_2 < \frac{2a_2y_4^*}{x_4^*+k_2} + q_2E$  atau  $r_1 > 2bx_4^* + \frac{4a_1x_4^{*3}y_4^* + 2a_1k_1x_4^{*3}y_4^{*3}}{(x_4^{*2}+k_1)^2} + q_1E$ ,  $r_2 > \frac{2a_2y_4^*}{x_4^*+k_2} + q_2E$ .

### 3. Kesetimbangan Bionomik

Kesetimbangan bionomik adalah suatu konsep yang mengintegrasikan kesetimbangan secara biologi dan keseimbangan secara ekonomi. Misalkan terdapat dua populasi yang ditinjau, yaitu  $x$  dan  $y$ . Keseimbangan secara ekologi diperoleh ketika populasi berada pada kondisi  $\frac{dx}{dt} = 0$  dan  $\frac{dy}{dt} = 0$ . Titik keseimbangan ini diperoleh dengan menyelesaikan sistem persamaan terhadap  $x$  dan  $y$ . Titik kesetimbangan ini menyatakan suatu kondisi dimana kedua populasi dalam keadaan setimbang, yaitu kedua populasi tidak mengalami perubahan karena laju pertumbuhannya nol. Kesetimbangan secara ekonomi dikatakan tercapai ketika pendapatan total ( $TR$ ) yang diperoleh dari penjualan stok (populasi) yang dipanen sama dengan biaya total ( $TC$ ) dari usaha yang dilakukan dalam pemanenan populasi

(Toaha, 2013). Bentuk umum dari pemanenan menggunakan persamaan pemanenan Schaefer (1954) pemanenan dirumuskan (Clark, 2006):

$$h = qEx \quad (7)$$

dengan  $h$  merupakan laju pemanenan dengan total penerimaan bersih per satuan waktu. Fungsi keuntungan dari usaha pemanenan populasi adalah

$$\pi = TR - TC \quad (8)$$

Total pendapatan ( $TR$ ) diperoleh dari harga perunit biomassa  $p$  dikalikan dengan laju pemanenan  $h$ . Sedangkan untuk total pembiayaan ( $TC$ ) sebanding dengan biaya pemanenan per unit usaha  $c$  dikalikan dengan usaha  $E$  yang dirumuskan (Prastiwi, 2012):

$$\pi = ph - cE \quad (9)$$

Maka, persamaan fungsi keuntungan dengan pemanenan yang dilakukan pada populasi predator dan prey adalah sebagai berikut:

$$\pi(E) = (p_1q_1x + p_2q_2y - C)E \quad (10)$$

dengan  $p_1$  merupakan harga *prey* per unit biomassa,  $p_2$  adalah harga *predator* per unit biomassa dan  $C$  merupakan pembiayaan yang dikeluarkan dalam melakukan pemanenan populasi.

Kesetimbangan bionomik adalah  $P_\infty = (x_\infty, y_\infty, E_\infty)$  dengan  $x_\infty, y_\infty, E_\infty$  adalah solusi positif dari persamaan berikut:

$$\frac{dx}{dt} = r_1x - q_1Ex - bx^2 - \frac{a_1x^2y}{x^2+k_1} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{dy}{dt} = r_2y - q_2Ey - \frac{a_2y^2}{x+k_2} = 0 \quad (12)$$

$$\pi(E) = (p_1q_1x + p_2q_2y - C)E = 0 \quad (13)$$

dari persamaan (11) dan (12) diperoleh

$$E = \frac{1}{q_1} \left( r_1 - bx - \frac{a_1xy}{x^2+k_1} \right) = \frac{1}{q_2} \left( r_2 - \frac{a_2y}{x+k_2} \right) = 0 \quad (14)$$

Jika biaya yang dikeluarkan untuk upaya pemanenan lebih besar dari pendapatan dari penjualan hasil pemanenan ( $C > p_1q_1x + p_2q_2y$ ), maka fungsi keuntungan akan bernilai negatif dan mengakibatkan pemanenan berhenti dan tidak terdapat kesetimbangan bionomik. Agar terdapat kesetimbangan bionomik, maka diasumsikan bahwa biaya yang dikeluarkan untuk pemanenan lebih kecil dari pendapatan yang diperoleh dari penjualan hasil pemanenan ( $C < p_1q_1x + p_2q_2y$ ). Melalui persamaan (12) dan (13) diperoleh,

$$y_\infty = \frac{C - p_1q_1x_\infty}{p_2q_2}$$

$$E_\infty = \frac{r_2}{q_2} - \frac{a_2(C - p_1q_1x_\infty)}{p_2q_2^2(x_\infty + k_2)}$$

(15)

dengan  $\frac{a_2C - k_2p_2q_2r_2}{q_2p_2r_2 + a_2p_1q_1} < x_\infty < \frac{C}{p_1q_1}$ ,  $0 < y_\infty < -\frac{1}{p_2q_2} \left( \frac{(a_2C - k_2p_2r_2)(p_1q_1)}{(q_2p_2r_2 + a_2p_1q_1)} - C \right)$  dan  $((-k_2p_2q_2r_2 + Ca_2)(-a_2p_1q_1 - p_2q_2r_2 + (k_2p_2q_2r_2 - Ca_2 + r_2p_2q_2k_2 - a_2C)(a_2p_1q_1 + p_2q_2r_2))(a_2p_1q_1 + p_2q_2r_2) / (a_2p_1q_1 + p_2q_2r_2)(k_2p_2q_2(a_2p_1q_1 + p_2q_2r_2)^2 - (-k_2p_2q_2r_2 + Ca_2p_2q_2^2) < E_\infty < (C(-a_2p_1q_1 - p_2q_2r_2) + k_2p_2q_2r_2p_1q_1 - Ca_2p_1q_1) / (-k_2p_1p_2q_1q_2^2 - Cp_2q_2^2)$ .

Jika  $E > E_\infty$ , kemudian total pembiayaan dari pemanenan lebih besar daripada total pendapatan dari hasil pemanenan, maka pemanenan akan mengalami kerugian, sehingga tidak dapat dilanjutkan. Jika  $E < E_\infty$ , kemudian pemanenan mengalami keuntungan, maka pemanenan dapat dilanjutkan.

#### 4. Kontrol Optimal Pemanenan

Prinsip maksimum pontryagin digunakan untuk menyelesaikan masalah pemanenan yang optimal. fungsi objektif yang akan dimaksimalkan adalah present value yang didefinisikan sebagai berikut

$$PV = \int_0^\infty (p_1 q_1 x + p_2 q_2 - C) E e^{-\delta t} dt \quad (16)$$

dengan  $\delta$  merupakan diskonto dengan variable kontrol  $E(t)$  dengan batas  $0 \leq E \leq E_{max}$ ,  $E_{max}$  adalah batas atas pemanenan atau dapat ditulis  $V_t[0, E_{max}]$ . Memaksimalkan  $PV$  dapat menggunakan prinsip maksimum pontryagin, maka  $PV$  dalam persamaan hamitonian  $H(x, y, \mu_1, \mu_2, E)$ , yaitu:

$$H = (p_1 q_1 x + p_2 q_2 y - C) E e^{-\delta t} + \mu_1 \left( r_1 x - q_1 E x - b x^2 - \frac{a_1 x^2 y}{x^2 + k_1} \right) + \mu_2 \left( r_2 y - q_2 E y - \frac{a_2 y^2}{x + k_2} \right) \quad (17)$$

dengan  $\mu_1, \mu_2$  merupakan variable adjoint dan persamaan keadaan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = r_1 x - q_1 E x - b x^2 - \frac{a_1 x^2 y}{x^2 + k_1} = 0 \\ \dot{y} &= \frac{dy}{dt} = r_2 y - q_2 E y - \frac{a_2 y^2}{x + k_2} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

persamaan co-state, yaitu:

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_1 &= \frac{d\mu_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \\ &= -p_1 q_1 E e^{-\delta t} - \mu_1 \left( r_1 - q_1 E - 2bx - \frac{2a_1 xy}{x^2 + k_1} + \frac{2a_1 x^3 y}{(x^2 + k_1)^2} \right) + \mu_2 \frac{a_2 y^2}{(x + k_2)^2} \\ \dot{\mu}_2 &= \frac{d\mu_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} \\ &= -p_2 q_2 E e^{-\delta t} + \mu_1 \frac{a_1 x^2}{x^2 + k_1} - \mu_2 \left( r_2 - q_2 E - \frac{2a_2 y}{x + k_2} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

Berdasarkan prinsip maksimum pontryagin, kondisi perlu yang dibentuk adalah kondisi stasioner dari  $H$ , sebagai berikut:

$$\frac{\partial H}{\partial E} = e^{-\delta t} (p_1 q_1 x + p_2 q_2 y - C) - \mu_1 q_1 x - \mu_2 q_2 y = 0 \quad (20)$$

Pada persamaan (20) diperoleh  $e^{-\delta t} (p_1 q_1 x + p_2 q_2 y - C) - \mu_1 q_1 x - \mu_2 q_2 y$  yang disebut fungsi *switching*  $\phi(t)$ . Ketika dalam  $H$ , variabel kontrol  $E(t)$  muncul secara linier, sehingga  $E(t)$  yang optimal tidak dapat ditentukan dengan kondisi  $\frac{\partial H}{\partial E} = 0$  dan batas maksimal  $E_{max}$  adalah  $\infty$ , maka masalah tersebut merupakan masalah yang berkaitan dengan penggabungan antara kontrol bang-bang dan kontrol singular. Kondisi kontrol optimal memenuhi kondisi

$$\begin{aligned} E(t) &= E_{max} = \infty, \text{ jika } \phi(t) < 0 \\ E(t) &= E_{min} = 0, \text{ jika } \phi(t) > 0 \\ E(t) &= E^*, \text{ jika } \phi(t) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Ketika  $E(t) = E^*$ , maka  $\mu_1 q_1 x + \mu_2 q_2 y = e^{-\delta t} (p_1 q_1 x + p_2 q_2 y - C) = e^{-\delta t} \frac{\partial \pi}{\partial E}$ . Pada persamaan (21) yang memenuhi kondisi  $E(t) = E^*$  disebut solusi singular adalah  $e^{-\delta t} (p_1 q_1 x^* + p_2 q_2 y^* - C) - \mu_1 q_1 x^* - \mu_2 q_2 y^* = 0$ , diperoleh

$$\mu_1 = \frac{e^{-\delta t} (p_1 q_1 x^* + p_2 q_2 y^* - C) - \mu_2 q_2 y^*}{q_1 x^*}$$

$$\mu_2 = \frac{e^{-\delta t} (p_1 q_1 x^* + p_2 q_2 y^* - C) - \mu_1 q_1 x^*}{q_2 y^*} \quad (22)$$

dengan mensubstitusi  $\mu_2$  dari persamaan (22) ke dalam  $\frac{d\mu_1}{dt}$  pada persamaan (19), maka dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{d\mu_1}{dt} - R_1 \mu_1 = -R_2 e^{-\delta t} \quad (23)$$

dengan  $R_1 = -(r_1 - q_1 E - 2bx^* - \frac{2a_1 x^* y^*}{x^{*2} + k_1} + \frac{2a_1 x^{*3} y^*}{(x^{*2} + k_1)^2} + \frac{a_2 q_1 x^* y^*}{q_2 (x^* + k_2)^2})$ ,  $R_2 = p_1 q_1 E \frac{a_2 y^* (p_1 q_1 x^* + p_2 q_2 y^* - C)}{q_2 (x^* + k_2)^2}$ .

Solusi dari persamaan (23) adalah  $\mu_1 = \frac{R_2}{R_1 + \delta} e^{-\delta t} + C$ . Substitusi solusi persamaan (23) ke dalam persamaan  $\frac{d\mu_2}{dt}$  (19), maka diperoleh:

$$\frac{d\mu_2}{dt} - S_1 \mu_2 = -S_2 e^{-\delta t} \quad (24)$$

dengan  $S_1 = -(r_2 - q_2 E - \frac{2a_2 y^*}{x^* + k_2})$  dan  $S_2 = p_2 q_2 E - \frac{a_1 R_2 x^{*2}}{(x^{*2} + k_1)(R_1 + \delta)} e^{-\delta t}$ . Solusi dari persamaan (24) adalah  $\mu_2 = \frac{S_2}{S_1 + \delta} e^{-\delta t} + C$  dengan kondisi transversality  $\mu_1(t) = 0$  untuk  $t \rightarrow \infty$ , sehingga solusi persamaan (23) dan (24) adalah:

$$\mu_1 = \frac{R_2}{R_1 + \delta} e^{-\delta t} \text{ dan } \mu_2 = \frac{S_2}{S_1 + \delta} e^{-\delta t} \quad (25)$$

Bentuk  $\mu_i e^{\delta t}$  ( $i = 1, 2$ ) merepresentasikan *shadow price* dan solusi persamaan (25) menyatakan bahwa *shadow price* tetap konstan dalam kesetimbangan optimal dengan memenuhi kondisi  $\infty$ . Nilai  $\mu_1$  dan  $\mu_2$  disubstitusi pada solusi singular saat  $t \rightarrow \infty$ , sehingga diperoleh

$$(p_1 - \frac{R_2}{R_1 + \delta}) q_1 x^* + (p_2 - \frac{S_2}{S_1 + \delta}) q_2 y^* - C = 0 \quad (26)$$

Melalui persamaan (4.23) diperoleh pemanenan optimal  $E_\delta$ . Substitusi persamaan (4.23) pada (4.35) dan  $y^* = (x^* + k_2) \left( \frac{r_2 - q_2 E}{a_2} \right)$  untuk memperoleh kesetimbangan optimal  $(x_\delta, y_\delta)$ . Kesetimbangan optimal  $(x_\delta, y_\delta, E_\delta)$  dapat berubah-ubah. Perubahan tersebut bergantung pada nilai  $\delta$ .

Persamaan (4.35) bergantung pada nilai  $\delta$ , sehingga

$$\pi(x, y, E) = p_1 q_1 x + p_2 q_2 y - C = \frac{R_2 q_1}{R_1 + \delta} x + \frac{S_2 q_2}{S_1 + \delta} y \rightarrow 0 \text{ jika } \delta \rightarrow \infty \quad (27)$$

Kondisi persamaan (27) menyebabkan keuntungan  $\pi(x_\infty, y_\infty, E_\infty, t) = 0$ . Persamaan tersebut juga menunjukkan bahwa fungsi keuntungan  $\pi$  merupakan fungsi turun, jika diskonto menuju tak berhingga, maka keuntungan akan menuju 0 dan keuntungan akan maksimal jika diskonto menuju 0.

Memaksimumkan present value dapat diperoleh dengan mensubstitusi kesetimbangan optimal  $(x_\delta, y_\delta, E_\delta)$ , sehingga diperoleh:

$$\int_0^\infty (p_1 q_1 x_\delta + p_2 q_2 y_\delta - C) E_\delta e^{-\delta t} dt = (p_1 q_1 x_\delta + p_2 q_2 y_\delta - C) E_\delta \int_0^\infty e^{-\delta t} dt$$

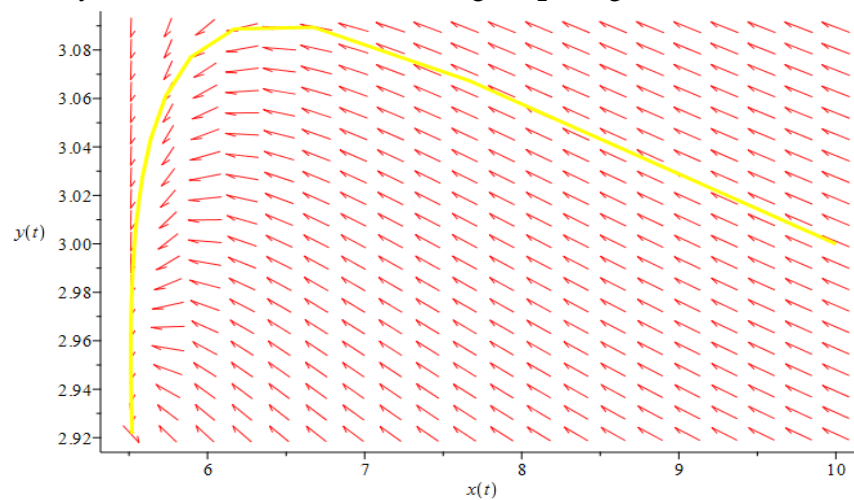
$$= \frac{(p_1 q_1 x_\delta + p_2 q_2 y_\delta - C) E_\delta}{\delta} \quad (28)$$

Selanjutnya akan dilakukan simulasi numerik dengan software maple 2016.

## 5. Simulasi Numerik

Nilai parameter berdasarkan dari penelitian-penelitian sebelumnya dan asumsi pada penelitian ini. Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi yaitu  $r_1 = 0.47$ ,  $r_2 = 0.2$ ,  $b = 0.75$ ,  $a_1 = 1.0$ ,  $a_2 = 0.85$ ,  $k_1 = 200$ ,  $k_2 = 10$ ,  $p_1 = 0.26$ ,  $p_2 = 0.32$ ,  $q_1 = 0.4$ ,  $q_2 = 0.2$ ,  $C = 0.18$ .

Titik kesetimbangan pada model leslie-gower fungsi respon holling III tanpa pemanenan diperoleh yaitu  $T_2(5.5203, 2.9215)$  dengan matriks Jacobian  $J(T_2) = \begin{pmatrix} -0.4552 & -0.1058 \\ 0.0301 & -0.1600 \end{pmatrix}$ . Persamaan karakteristik dari matriks  $J(T_2)$  adalah  $\lambda^2 + 0.1718\lambda + 0.0012$ . Nilai eigen yang diperoleh dari persamaan karakteristik tersebut adalah  $\lambda_1 = -0.1645$  dan  $\lambda_2 = -0.0073$ , sehingga titik kesetimbangan  $T_2$  stabil asimtotik Trayektori di sekitar titik kesetimbangan  $T_2$  sebagai berikut:



**Gambar 1.** Trayektori di sekitar titik kesetimbangan  $T_2$

Titik kesetimbangan pada model leslie-gower fungsi respon holling III dengan pemanenan diperoleh yaitu dengan membebaskan nilai parameter  $E$  adalah  $H_2(x_4^*, y_4^*)$  dimana,

$$x_4^* = 0.0078(-16660800E^2 - 865635960E + 981026791 - 1728000E^3 + 425(20044800000E^4 + 187880960000E^3 + 3810859104000E^2 - 11470917240000E + 13965165150000)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} - (127.5(-5.6938E + 71.3442 - 0.8858E^2))/(-16660800E^2 - 865635960E + 981026791 - 1728000E^3 + 425(20044800000E^4 + 187880960000E^3 + 3810859104000E^2 - 11470917240000E + 13965165150000)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} - 0.9412E + 1.4196 \quad \text{dan}$$

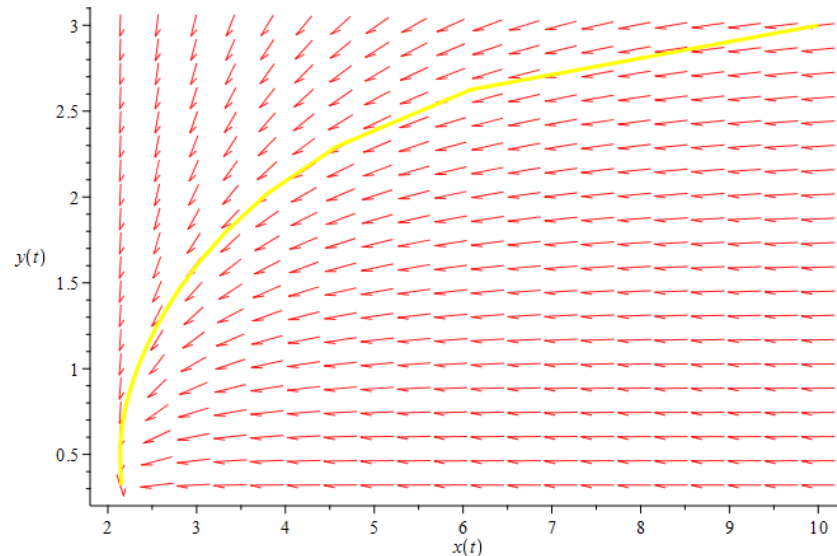
$$y_4^* = 1.1765(0.0078(-16660800E^2 - 865635960E + 981026791 - 1728000E^3 + 425(20044800000E^4 + 187880960000E^3 + 3810859104000E^2 - 11470917240000E + 13965165150000)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} - (127.5(-5.6938E + 71.3442 - 0.8858E^2))/(-16660800E^2 - 865635960E + 981026791 - 1728000E^3 + 425(20044800000E^4 + 187880960000E^3 + 3810859104000E^2 - 11470917240000E + 13965165150000)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} - 0.9412E + 11.4196) \\ (0.2E + 0.16)$$

Jika  $x_4^*$  dan  $y_4^*$  disubstitusi ke persamaan (10), diperoleh fungsi keuntungan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \pi = & 0.0006(-16660800E^2 - 865635960E + 9.81026791 - 1.728000E^3 + \\ & 425(20044800000E^4 + 187880960000E^3 + 3810859104000E^2 - 11470917240000E + \\ & 13965165150000)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} - (10.2(-5.6938E + 71.3442 - 0.8858E^2))/(-16660800E^2 - \\ & 865635960E + 9.81026791 - 1.728000E^3 + 425(20044800000E^4 + 187880960000E^3 \\ & + 3810859104000E^2 - 11470917240000E + 13965165150000)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} - 0.0753E - 0.0664 \\ & + 0.0611(0.0078((-16660800E^2 - 865635960E + 9.81026791 - 1.728000E^3 + \\ & 425(20044800000E^4 + 187880960000E^3 + 3810859104000E^2 - 11470917240000E + \\ & 13965165150000)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} - 127.5(-5.6938E + 71.3442 - 0.8858E^2))/((-16660800E^2 - \\ & 865635960 + 9.81026791 - 1.728000E^3 + 425(20044800000E^4 + 187880960000E^3 + \\ & 3810859104000E^2 - 11470917240000E + 13965165150000)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} - 0.9412E + \\ & 11.4196)(0.2E + 0.16) \end{aligned}$$

Kesetimbangan bionomik terjadi ketika total pendapatan hasil penjualan pemanenan sama dengan pembiayaan dari pemanenan atau fungsi keuntungan sama dengan 0, sehingga dari diperoleh nilai  $E = 0.7637$ .

Nilai  $E = 0.7636$  yang diperoleh disubstitusi ke titik kesetimbangan  $H_2$ , sehingga diperoleh titik kesetimbangan  $H_2(2.1822, 0.1043)$  dengan matriks Jacobian  $J(H_2) = \begin{pmatrix} -0.1645 & -0.0186 \\ 0.0001 & -0.0073 \end{pmatrix}$ . Persamaan karakteristik dari matriks  $J(H_2)$  adalah  $\lambda^2 + 0.1718\lambda + 0.0012$ . Nilai eigen yang diperoleh dari persamaan karakteristik tersebut adalah  $\lambda_1 = -0.1645$  dan  $\lambda_2 = -0.0073$ , sehingga titik kesetimbangan  $H_2$  stabil asimtotik. Trayektori di sekitar titik kesetimbangan  $H_2$  sebagai berikut:



**Gambar 2.** Trayektori di sekitar titik kesetimbangan  $H_2$

Pada model (4.7), kesetimbangan bionomik terjadi ketika pemanenan yang dilakukan dengan batas pemanenan untuk populasi *predator* dan *prey*  $P_\infty(x_\infty, y_\infty, E_\infty)$  yaitu  $P_\infty(2.1822, 0.1043, 0.7637)$ .



Pada kontrol optimal pemanenan, nilai  $\mu_1$  dan  $\mu_2$  pada kontrol optimal, yaitu:

$$\mu_1 = (0.08Ex^2 + 1.6Ex + 8E - 0.34xy - 0.221y^2 + 0.765y)e^{\delta t}(x^2 + 200)^2 / (0.15x^7 + (2.536 + 0.4E)x^6 + (65.72 + 8E - 1.7y)x^5 + (968. + 200E)x^4 + (-360y + 3200E + 8288)x^3 + (6400y + 32000E + 82880)x^2 + (228800 - 36000y + 320000E)x + 1600000E - 1856000)$$

dan

$$\mu_2 = (54.4x^3y - 96512E + 0.0679Ex^6 + 2.1374Ex^5 + 0.272x^5y + 31.136Ex^4 + 174.976Ex^3 - 122.4x^2y + 3029.76Ex^2 + 11897.6Ex - 18.72Ex^3y - 1872Exy - 0.0884Ex^5y + 332.8Ex^2y - 0.612x^4y + 83200E^2 + 0.0078x^7 + 0.0208E^2x^6 + 0.416E^2x^5 + 10.4E^2x^4 + 166.4E^2x^3 + 1664E^2x^2 + 16640E^2x + 35.36x^2y^2 + 0.1768x^4y^2)e^{\delta t}(x + 10) / ((228800x - 36000xy - 360x^3y + 1600000E - 1856000 + 2.536x^6 + 65.72x^5 + 968x^4 + 0.15x^7 + 0.4Ex^6 + 8Ex^5 - 1.7x^5y + 200Ex^4 + 3200Ex^3 + 6400x^2y + 32000Ex^2 + 320000Ex + 82880x^2 + 8288x^3)(-0.154x - 1.54 + 0.2Ex + 2E + 1.7y))$$

Nilai  $\mu_1$  dan  $\mu_2$  disubstitusi ke dalam persamaan (26) dan mengeliminasi dengan persamaan (14) dan mengambil nilai  $\delta = 0.006$ , maka diperoleh kesetimbangan optimal dengan pemanenan yang dilakukan pada populasi *predator* dan *prey* ( $x_\delta, y_\delta, E_\delta$ ) yaitu (2.25, 4.6411, 0.6513), sehingga dengan mensubstitusi kesetimbangan optimal ke dalam persamaan (28) diperoleh nilai present value adalah 26.1963.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Ashine, Ahmed Buseri dan Dawit Melese Gebru, 2017. Mathematical Modeling of a Predator-Prey Model with Modified Leslie-Gower and Holling-Type II Schemes. *Mathematics and Decision Sciences*. 17: 20-40.
- [2] Ávila-Vales, Eric, dkk. 2017. Bifurcations of a Leslie-Gower Predator-Prey Model with Holling Type III functional Response and Michaelis-Menten Prey Harvesting. <https://arxiv.org/pdf/1711.08081.pdf>.
- [3] Barnett, S., 1971. A New Formulation of The Theorems of Hurwitz, Routh and Sturm. *J. Inst. Maths Applics*. 8: 240-250.
- [4] Berryman, Alan. A. 1992. The Origins and Evolution of Predator-Prey Theory. *Ecology. Amerika*. 73: 1530-1535
- [5] Boyce, William E dan Richard DiPrima. 2012. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Wiley & Sons: Amerika.
- [6] Chen, Fengde, dkk. 2017. *Dynamic Behaviors Nonautonomous Modified Leslie-Gower Predator-Prey Model with Holling Type III Schemes and a Prey Refuge*. *Journal of Mathematics and Computer Science*. 17: 266-277
- Clark, Colin W. 2006. *The Worldwide Crisis in Fisheries*. Cambridge University Press: Inggris.
- [7] Didiharyono., 2016. Analisis Kestabilan dan Keuntungan Maksimum Model Predator-Prey Fungsi Respon Tipe Holling III dengan Usaha Pemanenan. *Masagena Jurnal*. 11: 314-326.
- [8] Huang, Jicai, Shigui Ruan dan Jing Song., 2014. Bifurcations in a Predator-Prey System of Leslie Type With Generalized Holling Type III functional response. *Journal of Differential Equations*. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2014.04.024>.

- [9] Kempf, Alexander., 2008. Predator-Prey Overlap Induced Holling Type III Functional Response in The North Sea Fish Assemblage . *Marine Ecology Progress Series*. 367: 295-308.
- [10] Keshet, Leah Edelstain. 2005. *Mathematical Models in Biology*. SIAM: Amerika.
- [11] Khalil, Hassan K., 2002. *Nonlinear Systems Third Edition*. Prentice Hall: Amerika.
- [12] Lenhart, Suzanne dan John T. Workman., 2007. *Optimal Control Applied and Biological Models*. CRC Press: New York.
- [13] Leslie, P.H. dan J. C. Gower. 1960. The Properties of a Stochastic Model for The Predator-Prey Type of Interaction Between Two Species. *Biometrika*. 47: 219-234.
- [14] Maziun, Nur Aina, dkk., 2010. *Analisis Stabilitas Lokal dan Kontrol Optimal Pada Terapi Obat Dalam Pengobatan Kanker*. ITS Library. <http://digilib.its.ac.id/ITS-Undergraduate-3100010041711/13408>.
- [15] Naidu, D. S., 2002. *Optimal Control Systems*. CRC Presses LLC: Amerika.
- [16] Prastiwi, Lusiana dan Subiono. Aplikasi Prinsip Maksimum Pontryagin Pada Model Bioekonomi Prey-Predator dengan Waktu Tunda. *Prosiding Seminar FMIPA UNS*. Surabaya, 24 Januari 2012.
- [17] Shaikh, Absos Ali, dkk. Study of LG Holling Type III Predator-Prey Model with Diseases in Predator. *Journal of Mathematics and Computing*. 1-21.
- [18] Sharma, Anuj. K, dkk., 2014. Dynamical Analysis of a Harvesting Model of Phytoplankton-Zooplankton Interaction. *International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering*. 8: 1013-1018.
- [19] Sinclair, A. R. E, dkk. 1998. Predicting Effect of Predation of Conservation of Endangered Prey. *Conservation Biology*. 12: 564-575.
- [20] Taha, Hamdy. A. 2007., *Operations Research: An Introduction Eighth Edition*. Pearson Education: Amerika.
- [21] Thomas, George B., 2014. *Calculus Early Transcendentals Thirteenth Edition*. Pearson Education: Amerika.
- [22] Wiggins, Stephen., 2003. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer: Amerika.
- [23] Yang, Wensheng dan Yongqing Li., 2013. Dynamics of a Diffusive Predator-Prey Model with Modified Leslie- Gower and Hollig Type III Scjemes. *Computers, Mathematics and Applications*. 65: 1727-1737.
- [24] Yue, Qin. ,2016. Dynamics of Modified Leslie-Gower Predator-Prey Model with Holling Type II Schemes and Prey Refuge. *Springer Plus*. 5: 1-12.
- [25] Toaha, S dan M I Azis., 2018. Stability and Optimal Harvesting of Modified Leslie-Gower Predator-Prey Model. *Journal of Physics*. 979: 1-9.