

PERBANDINGAN KUASA UJI PENDEKATAN BIGGERS DAN SATTERTHWAITE-COCHRAN DALAM MENGANALISIS DATA HILANG PADA RANCANGAN KELOMPOK TERACAK LENGKAP

Achmad Firdaus¹⁾, Mustofa Usman²⁾, dan Netti Herawati²⁾

¹⁾ Alumni Jurusan Matematika FMIPA UNILA, Bandar Lampung

²⁾ Dosen pada Jurusan Matematika FMIPA UNILA, Bandar Lampung

Abstrak

This study was aimed to compare type I error in estimating missing data by Biggers and Satterthwaite-Cochran methods in Randomized Comple Block Design. Simulation study using Gauss software showed that type I error for Biggers approach are over estimate. The problem can be overcome by Satterthwaite-Cochran approach.

Keyword: Missing data, randomized Block design, Biggers, Satterthwaite-Cochran.

PENDAHULUAN

Latar Belakang dan Masalah

Analisis data hilang telah menjadi topik yang menarik bagi banyak peneliti statistika seperti Yates (1933), Anderson (1946), Cochran dan Cox (1957), Kshirsagar (1971), Biggers (1959, 1961), Milliken dan Johnson (1982), dan Mustofa (1996, 1998). Untuk rancangan kelompok, jika terdapat data hilang, pendekatan Yates dipergunakan untuk menduga data yang hilang (Steel dan Torrie, 1980; Montgomery, 1976), nilai dugaan ini dimasukkan ke dalam data dan selanjutnya analisis standar dilakukan.

Pendekatan Yates memungkinkan kita memperoleh nilai harapan jumlah kuadrat galat yang tidak bias, tetapi nilai harapan jumlah kuadrat kelompok dan perlakuannya bias (Anderson, 1946; Kshirsagar dan Deo, 1989). Akibatnya pendekatan ini akan memberikan kesalahan tipe I yang lebih besar dari semestinya. Di samping itu asumsi-asumsi statistika seperti asumsi independen dan kesamaan ragam akan terlanggar sehingga uji statistiknya tidak menghampiri distribusi F. Selain itu pendekatan Yates adalah cara yang sangat tua, cara ini dipergunakan karena perhitungan yang lebih sederhana dibandingkan pendekatan lainnya. Untuk itu akan diteliti pendekatan biggers dan Satterthwaite-Cochran.

Tujuan Penelitian dan Pendekatan

Tujuan dari penelitian ini adalah membangun analisis data jika beberapa pengamatan hilang pada rancangan kelompok. Pendekatan Biggers akan digunakan untuk

menduga data hilang, kemudian besarnya bias akan dihitung dengan kaidah-kaidah yang umum digunakan, yaitu dengan model yang diasumsikan. Pendekatan untuk menghitung kuadrat tengah harapan didasarkan pada Milliken dan Johnson (1984) dan Searle (1971). Untuk membangun uji yang tak bias akan digunakan pendekatan Satterthwaite-Cochran. Untuk melihat efektifitas pendekatan yang dibangun simulasi dilakukan dengan menggunakan software Gauss versi 3.2. Yaitu dengan membandingkan kesalahan tipe I dan kuasa uji dari pendekatan Biggers, Satterthwaite-Cochran dan RKTL (tanpa data hilang). Juga akan dilihat perilaku kesalahan tipe I dari ketiga pendekatan di atas dengan kesalahan tipe I dari RKTL sebagai acuan.

LANDASAN TEORI

Rancangan Kelompok Teracak Lengkap

Bila terdapat keragaman lain selain dari keragaman perlakuan maka rancangan yang sesuai untuk digunakan adalah rancangan kelompok. Dan bila Setiap kelompok mengandung semua perlakuan disebut rancangan kelompok teracak lengkap (RKTL) dengan model matematisnya adalah:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \quad (1)$$

dengan $i = 1, 2, 3, \dots, a$ dan $j = 1, 2, 3, \dots, b$, dimana Y_{ij} adalah pengamatan dalam perlakuan ke- i dan kelompok ke- j , μ adalah parameter yang menyatakan rata-rata umum, τ_i adalah pengaruh perlakuan ke- i , $\beta_j =$ pengaruh kelompok ke- j ,

ε_{ij} = galat pada perlakuan ke- i dan kelompok ke- j dan bebas satu sama lain yang berdistribusi $N(0, \sigma^2)$. Dalam rancangan ini diasumsikan bahwa tidak ada interaksi antara kelompok dan perlakuan.

Jika kita menggunakan rancangan kelompok, kadang-kadang satu data atau lebih di dalam kelompok hilang. Hal ini dapat terjadi mungkin disebabkan oleh kelalaian, kesalahan pencatatan, atau mungkin karena kerusakan yang tidak dapat dihindari. Sehingga kehilangan data tertentu akan menimbulkan masalah baru, baik dalam melakukan analisis maupun pengambilan kesimpulan yang tepat. Untuk mengatasi masalah ini penulis mencoba menggunakan pendekatan Biggers, tetapi pendekatan ini menghasilkan nilai harapan jumlah kuadrat perlakuan dan kelompok yang bias (Mustofa, 1998), sehingga mengakibatkan uji hipotesis bias. Untuk memperbaiki hal ini, kita modifikasikan uji dengan menggunakan pendekatan Satterthwaite-Cochran.

Pendekatan Biggers

Misalkan rancangan kelompok tak seimbang yang akan dibahas didefinisikan sebagai berikut, terdapat 4 perlakuan yang terdiri dari 5 kelompok. Empat pengamatan yaitu Y_{12} , Y_{21} , Y_{33} , dan Y_{44} diasumsikan hilang. Dengan pendekatan Biggers, untuk menduga pengamatan yang hilang digunakan persamaan berikut ini :

$$\hat{Y} = A^{-1}q \quad (2)$$

dengan,

$$\hat{Y}_{est} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_{12} \\ \hat{Y}_{21} \\ \hat{Y}_{33} \\ \hat{Y}_{44} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}, \text{ dan } q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

dengan,

$$q_1 = 4A_{11} + 5B_{22} - G ;$$

$$A_{11} = Y_{11} + Y_{13} + Y_{14} \quad B_{11} = Y_{11} + Y_{31} + Y_{41} + Y_{51}$$

$$q_2 = 4A_{22} + 5B_{11} - G ; A_{22} = Y_{22} + Y_{23} + Y_{24}$$

$$B_{22} = Y_{22} + Y_{32} + Y_{42} + Y_{52}$$

$$q_3 = 4A_{33} + 5B_{33} - G ; A_{33} = Y_{31} + Y_{32} + Y_{34}$$

$$B_{33} = Y_{13} + Y_{23} + Y_{43} + Y_{53}$$

$$q_4 = 4A_{44} + 5B_{44} - G ; A_{44} = Y_{41} + Y_{42} + Y_{43}$$

$$B_{44} = Y_{14} + Y_{24} + Y_{34} + Y_{54}$$

$$G = B_{11} + B_{22} + B_{33} + B_{44}$$

Kemudian nilai dugaan data yang hilang ini dimasukkan ke dalam data dan analisis standar dilakukan pada data ini seolah-olah tidak ada data yang hilang. Dengan menghitung kuadrat tengah harapan untuk pendekatan Biggers (1959, 1961) ini, kita peroleh analisis ragamnya:

Tabel 1. Analisis Ragam pada Rancangan Kelompok dengan Empat Pengamatan Hilang

Sumber Keragaman	db	E(KT)
Perlakuan	3	$(1,3167)\sigma^2 + \frac{5}{3}\sum_i \tau_i^2$
Kelompok	4	$(1,3185)\sigma^2 + \sum_j \beta_j^2$
Galat	8	σ^2
Total	15	

Pendekatan Satterthwaite-Cochran

Untuk membentuk uji yang disesuaikan (*adjusted test*), kita perhatikan tabel analisis ragam di atas. Dari tabel tersebut jelas bahwa kuadrat tengah harapan diduga lebih besar dari semestinya yaitu sebesar 0,3167 dan 0,3185 berturut-turut untuk perlakuan dan kelompok. Untuk memperbaiki uji yang bias ini kita pergunakan pendekatan Satterthwaite-Cochran, prosedur yang diberikan oleh Bancroft (1968). Kita demonstrasikan sebagai berikut :

1. Uji untuk perlakuan, misal KTP dan KTG masing-masing adalah kuadrat tengah perlakuan dan kuadrat tengah galat. Perhatikan $KTP_{(adj)} = q \text{ KTP}$, dengan

$$q = \frac{1}{1,3167} \text{ dan } KTP_{(adj)} \text{ adalah kuadrat tengah}$$

perlakuan yang disesuaikan, sehingga kita peroleh $E(KTP_{(adj)}) = E(q(KTP)) = \sigma^2 + \phi \tau_i^*$ dengan

$$\phi \tau_i^* = \left(\frac{1}{1,3167} \right) \left(\frac{5}{3} \sum \tau_i^2 \right). \text{ Maka uji}$$

hipotesis, $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = 0$ dan

H_i : tidak semua nol adalah $F^* = \frac{KTP_{(adj)}}{KTG}$,

F^* disini tidak menghampiri distribusi F, tetapi dapat didekati dengan menggunakan distribusi

F yang derajat bebas pembilang dan penyebutnya (Bancroft, 1968). Dengan

$$db \text{ pembilang} = \frac{(num, KT)^2}{\sum_i \frac{[c_i(KT)_i]^2}{db_i}} \quad \text{dimana}$$

(num,KT) = pembilang dari F^* statistik
KT adalah kuadrat tengah dalam analisis; c_i = konstanta pengali pada KT_i ; dan db_i adalah derajat bebas kesesuaian dengan KT_i .

$$\text{Sedangkan } db \text{ penyebut} = \frac{(denom, KT)^2}{\sum_i \frac{[c_i(KT)_i]^2}{db_i}}$$

Dengan, (denom,KT) = penyebut dari F^* statistik

KT_i = kuadrat tengah dalam analisis, c_i = konstanta pengali pada KT_i , dan db adalah derajat bebas kesesuaian dengan KT_i .

2. Uji untuk kelompok, misal KTK dan KTG masing-masing adalah kuadrat tengah kelompok dan kuadrat tengah galat.

Perhatikan $KTK_{(adj)} = q KTK$, dengan

$$q = \frac{1}{1,3185} \text{ dan } KTK_{(adj)} \text{ adalah kuadrat tengah}$$

kelompok yang disesuaikan, sehingga kita peroleh :

$$E(KTK_{(adj)}) = E(q(KTK)) = \sigma^2 + \phi \beta_i^*$$

Dengan, $\phi \beta_i^* = \left(\frac{1}{1,3185} \right) \left(\sum \beta_i^2 \right)$. Maka uji

hipotesis, $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$;

H_i : tidak semua nol adalah $F^* = \frac{KTK_{(adj)}}{KTG}$,

F^* disini tidak menghampiri distribusi F, tetapi dapat didekati dengan menggunakan distribusi F yang derajat bebas pembilang dan penyebutnya (Bancroft, 1968). Dengan

$$db \text{ pembilang} = \frac{(num, KT)^2}{\sum_i \frac{[c_i(KT)_i]^2}{db_i}} \quad \text{Dimana,}$$

(num,KT) = pembilang dari F^* statistik
 KT_i = kuadrat tengah dalam analisis, c_i = konstanta pengali pada KT_i , dan db_i = derajat bebas kesesuaian dengan KT_i

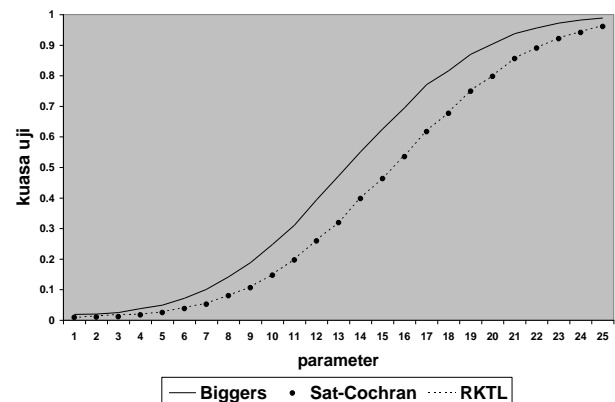
$$db \text{ penyebut} = \frac{(denom, KT)^2}{\sum_i \frac{[c_i(KT)_i]^2}{db_i}} \quad \text{Dimana,}$$

(denom,KT) = penyebut dari F^* statistik, KT_i = kuadrat tengah dalam analisis, c_i = konstanta pengali pada KT_i , dan db_i = derajat bebas kesesuaian dengan KT_i

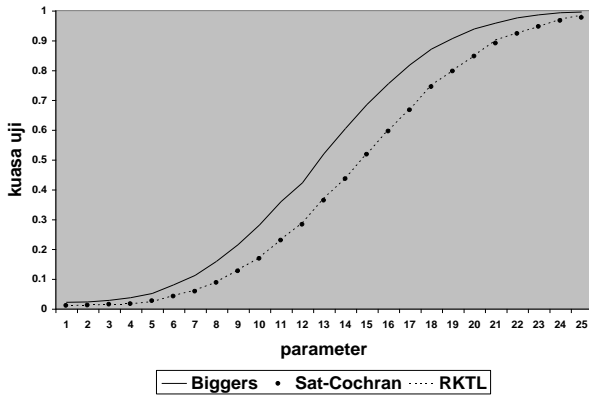
HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil simulasi dari dua pendekatan uji statistik yaitu pendekatan Biggers dan pendekatan Satterthwaite-Cochran. Rancangan kelompok tak seimbang yang akan dibahas dalam simulasi didefinisikan sebagai berikut, terdapat 4 perlakuan yang terdiri dari 5 kelompok. Kita asumsikan 4 pengamatan yaitu Y_{12} , Y_{21} , Y_{33} , dan Y_{44} hilang. Untuk mendapatkan nilai dugaannya digunakan pendekatan Biggers yang merupakan perluasan dari ide pendekatan Yates. Kemudian nilai dugaan ini dimasukkan ke dalam data dan analisis standar dilakukan seakan-akan tidak ada data yang hilang. Dengan menghitung kuadrat tengah harapan untuk pendekatan Biggers ini, lihat tabel 3, kita peroleh besarnya bias yaitu sebesar 0,3167 dan 0,3185 berturut-turut untuk perlakuan dan kelompok. Dari sini jelas bahwa kuadrat tengah harapan untuk perlakuan dan kelompok diduga lebih besar dari yang semestinya. Untuk memperbaiki uji yang bias ini kita pergunakan pendekatan Satterthwaite-Cochran, prosedur yang diberikan oleh Bancroft (1968).

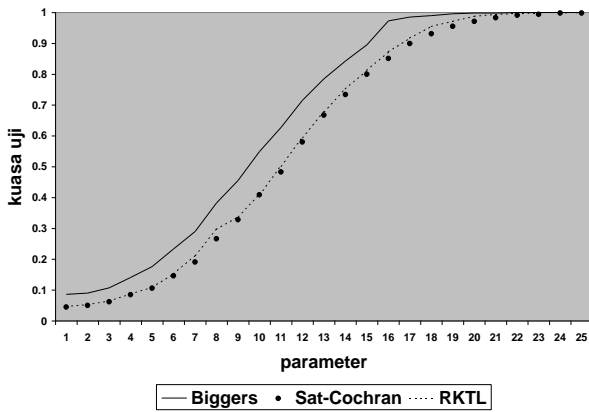
Untuk mendapatkan data, kita asumsikan struktur galat diketahui dan galat acak ini diperoleh dengan melakukan simulasi dengan software GAUSS. Untuk setiap pengujian, sepuluh ribu data set dibangun secara acak dan untuk setiap set data kita evaluasi ukuran kesalahan tipe I dan kuasa ujinya dengan berbagai konfigurasi parameter. Hipotesis yang diuji adalah $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = 0$ dengan H_i : tidak semua nol, dan $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$ dengan H_i : tidak semua nol, Didapat hasil dari simulasi GAUSS seperti terlihat gambar di bawah ini :



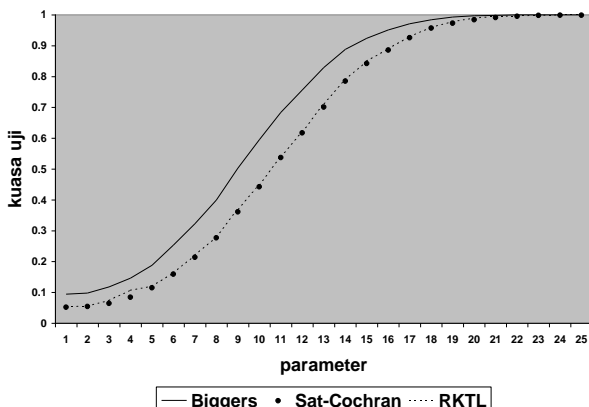
Gambar 1. Perbandingan kesalahan tipe I dan kuasa uji untuk perlakuan pendekatan Biggers, pendekatan Satterthwaite-Cochran dan Rancangan Kelompok ($\alpha = 0.01$).



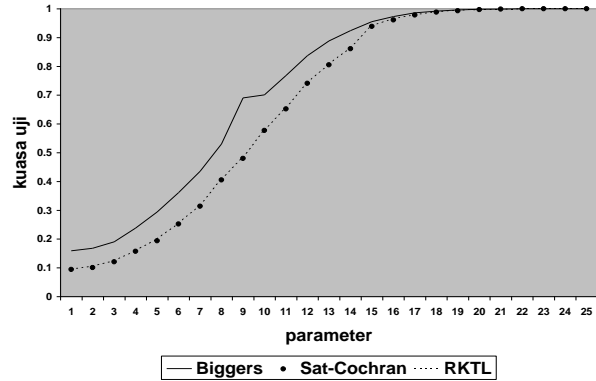
Gambar 2. Perbandingan kesalahan tipe I dan kuasa uji kelompok pendekatan Biggers, Pendekatan Satterthwaite-Cochran dan Rancangan Kelompok ($\alpha = 0.01$).



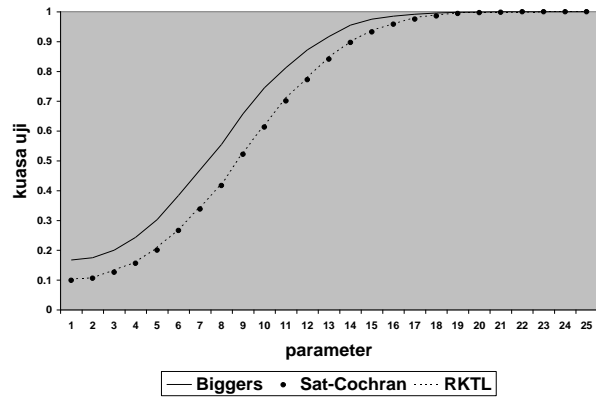
Gambar 3. Perbandingan kesalahan tipe I dan kuasa uji untuk perlakuan pendekatan Biggers, pendekatan Satterthwaite-Cochran dan Rancangan Kelompok ($\alpha = 0.05$).



Gambar 4. Perbandingan kesalahan tipe I dan kuasa uji untuk kelompok pendekatan Biggers, Pendekatan Satterthwaite-Cochran dan Rancangan Kelompok ($\alpha = 0.05$).

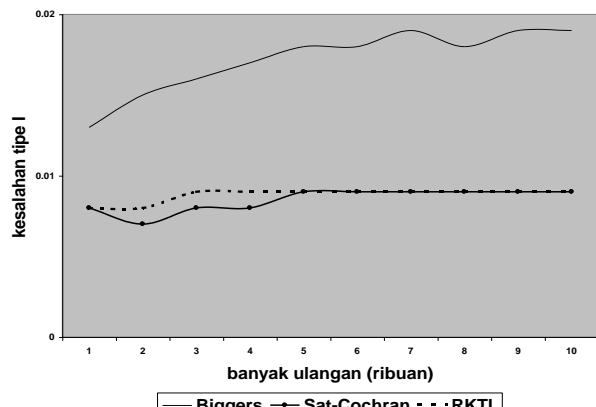


Gambar 5. Perbandingan kesalahan tipe I dan kuasa uji untuk perlakuan pendekatan Biggers, pendekatan Satterthwaite-Cochran dan Rancangan Kelompok ($\alpha = 0.10$).

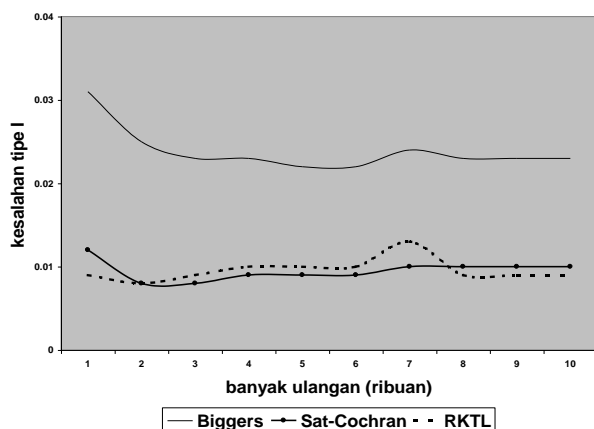


Gambar 6. Perbandingan kesalahan tipe I dan kuasa uji untuk kelompok pendekatan Biggers, Pendekatan Satterthwaite-Cochran dan Rancangan Kelompok ($\alpha = 0.10$).

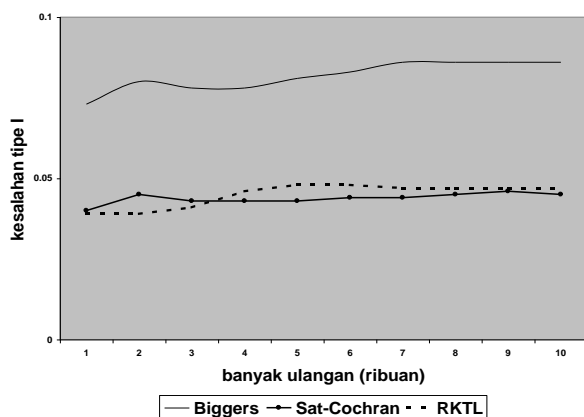
Juga dapat kita perhatikan bagaimana perilaku perlakuan dan kelompok jika diuji pada besar sampel yang berbeda.



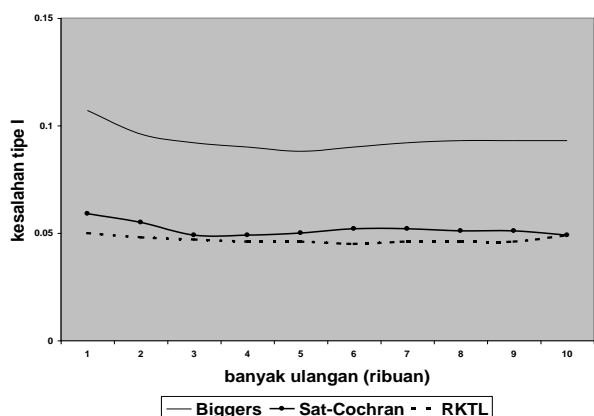
Gambar 7. Perilaku kesalahan tipe I untuk perlakuan pada $\alpha = 0.01$



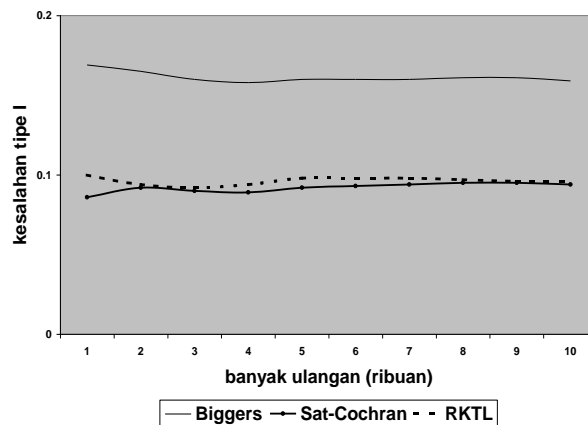
Gambar 8. Perilaku kesalahan tipe I untuk kelompok pada $\alpha = 0.01$



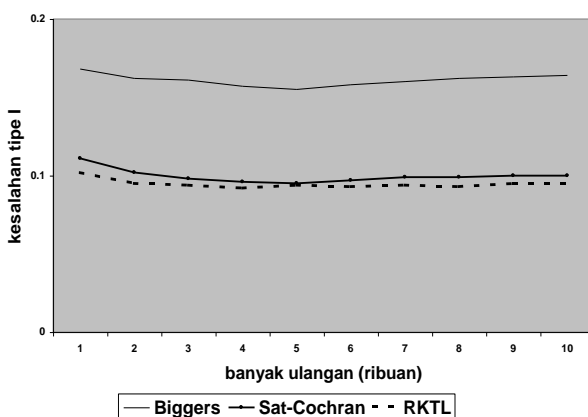
Gambar 9. Perilaku kesalahan tipe I untuk perlakuan pada $\alpha = 0.05$



Gambar 10. Perilaku kesalahan tipe I kelompok pada $\alpha = 0.05$



Gambar 11. Perilaku kesalahan tipe I untuk perlakuan pada $\alpha = 0.10$



Gambar 12. Perilaku kesalahan tipe I untuk kelompok pada $\alpha = 0.10$

Dari hasil simulasi dapat ditarik kesimpulan bahwa kesalahan tipe I dan kuasa uji untuk pendekatan Biggers diduga lebih besar dari semestinya, hal ini memang harus demikian karena kuadrat tengah harapan menyimpang dari yang diharapkan. Kesalahan tipe I dari simulasi diperoleh sebesar 0,086 dan 0,076 untuk perlakuan dan kelompok secara berturut-turut. Nilai-nilai ini diatas batas toleransi 0,030 - 0,070 untuk kesalahan tipe I sebesar 0,05 (Pearson dan Please, 1975). Begitu juga pada $\alpha = 0,01$ dan $\alpha = 0,10$ kesalahan tipe I-nya diduga lebih besar dari semestinya, sama halnya dengan kuasa ujinya. Dengan menggunakan

pendekatan Satterthwaite-Cochran kesalahan tipe I dan kuasa uji ini dapat diperbaiki, dan hasilnya relatif mendekati 0,05, 0,01 dan 0,10 dari masing-masing hasil simulasinya. Dengan kata lain uji yang dihasilkan dari pendekatan Satterthwaite-Cochran tidak bias.

Dari grafik gambar 1 sampai 6, terlihat jelas bahwa pada pendekatan Biggers terjadi bias ke atas yang relatif besar terhadap rancangan kelompok standar (tanpa ada data yang hilang), sedangkan pendekatan Satterthwaite-Cochran relatif sama, baik kesalahan tipe I maupun kuasa ujinya dengan rancangan kelompok standar. Dengan kata lain tidak terjadi bias pada pendekatan Satterthwaite-Cochran. Dan perilaku kesalahan tipe I untuk perlakuan dan kelompok ini dapat kita lihat pada gambar 7 sampai 12, dimana kesalahan tipe I ini relatif stabil di taraf nyata 0,05, 0,01 dan 0,10 untuk pendekatan Satterthwaite-Cochran yang mendekati rancangan kelompok standar sebagai acuan yang diuji pada besar sampel yang berbeda. Dan hasil simulasi kesalahan tipe I dari pendekatan Satterthwaite-Cochran yang didapat nampak tidak bias.

KESIMPULAN

Dari hasil simulasi dan pembahasan diatas dapat ditarik kesimpulan bahwa Pendekatan Biggers dapat menjadi alternatif pilihan dalam menganalisis data yang hilang pada rancangan kelompok walaupun pendekatan ini masih mempertahankan kuadrat tengah harapan yang bias untuk perlakuan dan kelompok, tetapi hal ini dapat diperbaiki dengan menggunakan pendekatan Satterthwaite-Cochran dan uji yang dihasilkan nampak tidak bias.

DAFTAR PUSTAKA

- Bancroft, T.A. 1968. *Topics in Intermediate Statistical Methods* (Vol. 1). The Iowa State University Press, Ames, Iowa.
- Biggers, J.D. 1959. *The Estimation of Missing and Mixed-up Observations in several Experimental Designs*. Department of Physiology, Royal Veterinary College, London.
- Biggers, J.D. 1961. Estimation of Missing Observation in Split-plot Experiment where whole Plots are Missing Mixed-Up. *Biometrics*, 468 - 472.

- Cochran, W.G and G.M. Cox. 1957. *Experiment Design*. John Wiley and Sons. New York.
- Dougherty, E.R. 1990. *Probability and Statistic for the Engineering, Computing, and Physical Sciencies*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Kshirsagar, A.M and Deo, S. 1989. Distribution of Biased Hypotheses Sum of Squares in Linear Models with Missing Obseervations. *Commnin Stat*, 2747 - 2754.
- Maple Valley, W.A. *Gauss-386i VM Version 3.2.15*. 1996. Aptech System, Inc.
- Milliken, G.A and Johnson, D.E. 1984. *Analysis of Messy Data*. Van Nostrand Reinhold, New York.
- Montgomery, D.C. 1976. *Design and Analysis of Experiment* (third edition). John Wiley and Sons, New York.
- Pearson, E.S. and Please, N.W. 1975. Relation between the Shape of Population Distribution and the Robustness of four simple Test Statistics. *Biometrics* 62 223 - 241.
- Searle, S.R. 1971. *Linear Models*. John Wiley and Sons, New York.
- Sembiring, R.K. 1995. *Analisis Regresi*. Penerbit ITB Bandung. Bandung.
- Steel, R.G.D and J.H. Torrie. 1995. *Prinsip dan Prosedur Statistika suatu Pendekatan Biometrik*. P.T Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.
- Usman, M., N. Herawati, dan R. Ruswandi. 1998. Analisis Data Hilang pada Rancangan Bujur Sangkar Latin. *Jurnal Sains dan Teknologi Edisi Khusus Desember*, 94-103.
- Usman, M. dan R. Ruswandi. 1998. Simulasi Perbandingan Kuasa Uji Pendekatan Yates, Satterthwaite dan Model Linear untuk Analisa Data Hilang pada Rancangan Kelompok Teracak Lengkap. *Journal Sains dan Teknologi* 4(1): 122-139.

⊗