Analisis Kestabilan Titik Tetap Model Tiga Spesies Ikan

Wahyu Hartono
Program Studi Pendidikan Matematika FKIP UNSWAGATI
Jl. Perjuangan No 1 Cirebon, wahyuhartono81@gmail.com

ABSTRAK

Permasalahan kebijakan pemanenan ikan yang memberikan keuntungan maksimum dan berkelanjutan (tidak terjadi kepunahan dari populasi ikan yang dipanen) adalah hal yang sangat penting bagi industri perikanan. Para ilmuwan berusaha menyelesaikan permasalahan tersebut dengan berbagai cara, salah satunya adalah dengan memodelkan permasalahan tersebut secara matematis kemudian menyelesaikannya dengan menggunakan metode yang sesuai untuk model tersebut.

Dalam tulisan ini, model matematika diajukan dan dianalisis untuk mempelajari kedinamikan sistem satu-mangsa dua-pemangsa dari tiga spesies ikan dengan pemanenan terhadap kedua pemangsa oleh para nelayan. Kriteria kestabilan global untuk titik ekuilibrium positif diperoleh dengan metode Lyapunov. Akhirnya, simulasi komputer ditampilkan untuk menyelidiki kedinamikan dari sistem dengan memberikan nilai parameter-parameter sistemnya.

Perilaku global dari sistem telah dibuktikan secara detail dengan menggunakan fungsi Lyapunov dan beberapa batasan parameter. Sistem interaksi tiga spesies ikan seperti yang dimodelkan pada tulisan ini bersifat stabil asimtotik global pada beberapa wilayah parameter.

Kata Kunci : Model Matematika, Stabil Global, Metode Lyapunov.

ABSTRACT

The problem of fish harvest policy which give maximum profit and continuity (the fish population exctinction is not happen) is an important things for the fishery industries. Many scientists try to solve this problem with many ways and one of them is to make a mathematical model and then solve the model with appropriate method.

In this paper, a mathematical model is proposed and analysed to study the dynamics of one-prey two-predators system with harvesting toward the predators by the fisherman. Criteria for global stability of the positive equilibria are obtained by the Lyapunov method. Finally, computer simulations are performed to investigate the dynamics of the system by choosing the value of the system's parameters.

The global behavior of the system has been proved by suitable Lyapunov function that has been constructed, and assuming some parametric restrictions. It has been found that the system is globally asymptotically stable in certain parametric regions.

Key Word : Mathematical Model, Global Stability, Lyapunov Method.

Pendahuluan

Permasalahan kebijakan pemanenan ikan yang memberikan keuntungan maksimum dan berkelanjutan (tidak terjadi kepunahan dari populasi ikan yang dipanen) adalah hal yang sangat penting bagi industri perikanan. Para ilmuwan berusaha menyelesaikan permasalahan tersebut dengan berbagai cara, salah satunya adalah dengan memodelkannya secara matematis kemudian menyelesaikannya menggunakan metode yang sesuai untuk model tersebut. Dalam tulisan ini akan dipelajari dinamika populasi dari model pertumbuhan dua spesies ikan yang berkompetisi yang bergantung tidak hanya pada sumberdaya eksternal tetapi juga bergantung pada spesies ketiga, yaitu sumberdaya yang dapat memperbaharui dirinya sendiri. Selain itu, pertumbuhan dari dua spesies ikan yang berkompetisi juga dipengaruhi oleh usaha pemanenan terhadap kedua spesies ikan tersebut. Karya ilmiah ini merupakan rekonstruksi dari tulisan Chattopadhyay dan kawan-kawan yang berjudul *A resource based competitive system in three species fishery*.

Tujuan penulisan karya ilmiah ini adalah

1. melakukan analisis kestabilan titik tetap,
2. mengamati dinamika populasi ikan.

Beberapa landasan teori yang dibahas pada karya ilmiah ini meliputi sistem persamaan diferensial (SPD), titik tetap, pelinearan serta konsep kestabilan, yang disarikan dari berbagai sumber pustaka.

Definisi 1. (SPD Mandiri)

Misalkan suatu sistem persamaan diferensial (SPD) dinyatakan sebagai

$$\frac{dx}{dt} = x = f(x), x \in \mathbb{R}^n$$

dengan *f* fungsi kotinu dari *x* dan mempunyai turunan parsial kontinu. SPD tersebut disebut sistem persamaan diferensial mandiri jika tidak mengandung t secara eksplisit di dalamnya. (Kreyszig, 1983)

Definisi 2. (SPD Linear Orde Satu)

Jika suatu sistem persamaan diferensial (SPD) dinyatakan sebagai

$$x = Ax + b, \qquad x(0) = x_0, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

Dengan A adalah matriks koefisien berukuran $n \times n$, maka sistem tersebut dinamakan SPD linear orde 1 dengan kondisi awal $x(0) = x_0$. Sistem disebut homogen jika $b = 0$ dan takhomogen jika $b \neq 0$. (Fisher, 1990)

Definisi 3. (Vektor Eigen dan Nilai Eigen)

Jika **A** adalah suatu matriks $n \times n$, maka vektor taknol **x** pada $\mathbb{R}^n$ disebut suatu vektor eigen dari **A** jika **Ax** adalah suatu penggandaan skalar dari **x** ; yaitu,

$$\boldsymbol{Ax = \lambda x}$$

untuk suatu skalar **λ**. Skalar **λ** disebut nilai eigen dari **A** , dan **x** disebut suatu vektor eigen dari **A** yang berpadanan dengan **λ**. (Anton, 2000)

Untuk mencari nilai λ dari matriks *A* , maka persamaan dapat ditulis kembali sebagai

$$(\boldsymbol{A - \lambda I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

dengan **I** matriks identitas. Persamaan di atas mempunyai solusi taknol jika dan hanya jika

$$\boldsymbol{p(\lambda) = det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = 0.}$$

Persamaan disebut persamaan karakteristik dari matrik **A**. (Anton, 2000)

Definisi 4. (Titik Tetap dan Titik Biasa)

Misalkan diberikan SPD taklinear berikut

$$x = f(x): U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Titik x^* dengan $f(x^*) = 0$ disebut titik kritis atau titik tetap atau titik keseimbangan. Titik *x* pada bidang fase yang bukan titik tetap, yaitu $f(\bar{x}) \neq 0$, disebut titik biasa atau titik *regular*. (Tu, 1994)

Teorema Pelinearan dari Hartman & Grobman)

Misalkan sistem dinamik taklinear $x = f(x)$ mempunyai titik tetap *simple hyperbolic* x^*, dan misalkan titik tetap tersebut berada pada (0,0) untuk penyederhanaan, maka pada *U* di sekitar $x \in \mathbb{R}^n$, bidang fase dari sistem taklinear dan sistem hasil pelinearannya adalah ekuivalen. (Tu, 1994)

Misalkan $\lambda_j = \alpha_j \pm i\beta_j$ adalah nilai eigen dari matriks Jacobi **A** dengan $Re(\lambda_{j)}) = \alpha_j$ dan $Im(\lambda_{j)}) = \beta_j$. Kestabilan titik tetap *simple hyperbolic* mempunyai beberapa perilaku sebagai berikut:

1. Stabil *Attractor*, jika :
   a. $Re(\lambda_j) = \alpha_j < 0$ dengan $Im(\lambda_j) = 0$ untuk setiap *j* = 1, 2,3.
   b. Terdapat $Re(\lambda_j) = \alpha_j < 0$ dengan $Im(\lambda_j) = 0$ dan $Re(\lambda_k) = \alpha_k < 0$ dengan $Im(\lambda_k) \neq 0$ untuk *j* = 1, 2,3 dan $j \neq k$.
2. Takstabil *Repellor*, jika:
   a. $Re(\lambda_j) = \alpha_j > 0$ dengan $Im(\lambda_j) = 0$ untuk setiap *j* = 1, 2,3.
   b. Terdapat $Re(\lambda_j) = \alpha_j > 0$ dengan $Im(\lambda_j) = 0$ dan $Re(\lambda_k) = \alpha_k > 0$ dengan $Im(\lambda_k) \neq 0$ untuk *j* = 1, 2,3 dan $j \neq k$.
3. Titik Sadel
   a. $Re(\lambda_j) = \alpha_j > 0$ dengan $Im(\lambda_j) = 0$ dan $Re(\lambda_k) = \alpha_k < 0$ dengan $Im(\lambda_k) \neq 0$ untuk *j* = 1,2,3 dan $j \neq k$
   b. Terdapat $Re(\lambda_j) = \alpha_j > 0$ dengan $Im(\lambda_j) = 0$ dan $Re(\lambda_k) = \alpha_k < 0$ dengan $Im(\lambda_k) = 0$ untuk *j* = 1, 2,3 dan $j \neq k$.
   c. Terdapat $Re(\lambda_j) = \alpha_j < 0$ dengan $Im(\lambda_j) = 0$ dan $Re(\lambda_k) = \alpha_k > 0$

dengan $Im(\lambda_k) \neq 0$ untuk j = 1, 2,3 dan $j \neq k$.

d. Terdapat $Re(\lambda_j) = \alpha_j < 0$ dengan $Im(\lambda_j) = 0$ dan $Re(\lambda_k) = \alpha_k > 0$ dengan $Im(\lambda_k) = 0$ untuk j = 1, 2,3 dan $j \neq k$.

Definisi Matriks Definit Positif

Suatu matriks simetriks real ***A*** disebut definit positif jika $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ untuk semua **x** taknol dalam $\mathbb{R}^n$. (Leon, 2001)

Teorema

Misalkan A adalah matriks simetrik real berorde $n \times n$. Maka A adalah definit positif jka dan hanya jika semua nilai-nilai eigennya adalah positif. (Leon, 2001)

Definisi Fungsi Liapunov

Suatu fungsi bernilai real dan terturunkan V(**x**) pada titik **x** di sekitar $\bar{\boldsymbol{x}}$, untuk penyederhanaan misalkan $\bar{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$, sedemikian sehingga V(**x**) ≥ 0 , V(**0**) = 0 yaitu V(**x**) = 0 jika dan hanya jika **x** = $\bar{\boldsymbol{x}}$ (= **0**), disebut fungsi Liapunov. (Tu, 1994)

Definisi Fungsi Definit Positif/Negatif dan Semidefinit Positif/Negatif

Misalkan *V*(**x**) adalah fungsi bernilai real dengan **x** adalah $(x_1, x_2, \dots\dots, x_n)$. V(**x**) adalah definit positif (negatif) pada daerah S di sekitar titik asal jika V(**x**) > 0 (V(**x**) < 0) untuk semua **x** ≠ **0** pada S, dan V(**0**) = 0.

V(**x**) adalah semidefinit positif (negatif) pada daerah S di sekitar titik asal jika V(**x**) ≥ 0 (V(**x**) ≤ 0) untuk semua **x** ≠ **0** pada S, dan V(**0**) = 0. (Smith, 1987)

Metode Penelitian

Metode penulisan karya ilmiah ini adalah studi literatur. Tahap pertama penelitian adalah merekonstruksi model yang sesuai dengan permasalahan, kemudian dilakukan analisis kestabilan titik tetap terhadap model tersebut. Simulasi komputer ditampilkan untuk menyelidiki kedinamikan dari sistem dengan memberikan nilai parameter-parameter sistemnya.

Hasil dan Pembahasan

Model satu mangsa dua pemangsa dengan dua pemangsa terjadi hubungan kompetisi dapat disusun menjadi suatu sistem persamaan diferensial taklinear sebagai persamaan 1 berikut:

$$\frac{dx}{dt} = px\left(1 - \frac{x}{K}\right) - axy - bxz$$

$$\frac{dy}{dt} = qy\left(1 - \frac{y}{L}\right) + cxy - dyz - vUy$$

$$\frac{dz}{dt} = rz\left(1 - \frac{z}{M}\right) + ezx - fzy - wUz$$

dengan

$\frac{dx}{dt} =$ laju pertumbuhan individu mangsa,

$\frac{dy}{dt} =$ laju pertumbuhan individu pemangsa I

$\frac{dz}{dt} =$ laju pertumbuhan individu pemangsa II, parameter *p* merupakan laju pertumbuhan instrinsik yang berhubungan dengan kelahiran dan kematian alami populasi, *q* adalah laju intrinsik populasi *y*, *r* adalah laju pertumbuhan instrinsik yang berhubungan dengan kelahiran dan kematian alami populasi, *x* adalah banyaknya individu mangsa pada waktu *t*, *K* menyatakan daya muat lingkungan (*carrying capacity*) yang menyatakan kapasitas maksimum populasi *x* dalam lingkungan tersebut. *L* menyatakan daya muat lingkungan (*carrying capacity*) yang menyatakan kapasitas maksimum populasi *y* dalam lingkungan tersebut. *M* menyatakan daya muat lingkungan (*carrying capacity*) yang menyatakan kapasitas maksimum populasi *z* dalam lingkungan tersebut, *a* adalah besarnya laju pemangsaan dari pemangsa I, *y* adalah banyaknya individu pemangsa I, *b* adalah besarnya laju pemangsaan dari pemangsa II, *c* adalah faktor konversi yang menetapkan banyaknya pemangsa I baru yang dilahirkan untuk tiap mangsa yang ditangkap dan *z* adalah banyaknya individu pemangsa II. *U* adalah usaha penangkapan yang dilakukan oleh para nelayan, *v* adalah koefisien ketertangkapan pemangsa I, *e* adalah faktor konversi yang menyatakan banyaknya pemangsa II baru yang dilahirkan untuk tiap mangsa yang ditangkap, *w* adalah koefisien ketertangkapan pemangsa II, *f* adalah laju pertumbuhan per kapita dari populasi *x* terkait penambahan satu individu dari populasi *z*, *d* adalah laju pertumbuhan per kapita dari populasi *y* terkait penambahan satu individu dari populasi *z*.

$K, L, M > 0$, $p,q,r > 0$, $0 \leq U \leq U_{maks}$,

$0 < a < 1, 0 < b < 1, 0 < c < 1, 0 < d < 1$

$0 < e < 1, 0 < f < 1, 0 < v < 1, 0 < w < 1$

dan $0 < x < 1$.

Pada persamaan 1, dilakukan analisis kestabilan dari tiap titik tetapnya. Sebagai langkah awal akan ditentukan titik tetapnya, kemudian sistem ini akan dilinearkan dengan mengonstruksi matriks jacobinya dan selanjutnya menganalisis kestabilannya dengan memeriksa nilai eigen. Akhirnya didapat titik tetap sebagai berikut.

$E_0 = (0,0,0)$

$E_1 = (x_1, 0,0)$

$E_2 = (x_2, y_2, 0)$

$E_3 = (x_3, 0, z_3)$

$E_4 = (x_4, y_4, z_4)$

$E_5 = (0, y_5, 0)$

$E_6 = (0, y_6, z_6)$

$E_7 = (0,0, z_7)$

dengan

$x_1 = K$

$$x_2 = \frac{K(pq + aL(-q + Uv))}{acKL + pq}$$
$$y_2 = \frac{Lp(cK + q - Uv)}{acKL + pq}$$
$$x_3 = \frac{K(pr + bM(-r + Uw))}{beKM + pr}$$

$$z_3 = \frac{Mp9eK + r - Uw)}{beKM + pr}$$

$$x_4 = \frac{K(r(-aLq + pq + aLUv) - dLM(fp - ar + aUw) + bM(-qr + fL(q - Uv) + qUw))}{-LM(adeK + bcfK + dfp) + beKMq + (acKL + pq)r}$$

$$y_4 = \frac{L(pr(cK + q - Uv) - dMp(eK + r - Uw) + bKM(eq - cr - eUv + cUw))}{-LM(adeK + bcfK + dfp) + beKMq + (acKL + pq)r}$$

$$z_4 = \frac{M(aeKL(q - Uv) + cKL(fp - ar + aUw) - p(eKq - fLq + qr + fLUv - qUw))}{M(adeK + dfp + bK(cfL - eq)) - (acKL + pq)r}$$

$$y_5 = L - \frac{LvU}{q}$$
$$y_6 = \frac{L(-qr + rUv + dM(r - Uw))}{dfLM - qr}$$
$$z_6 = \frac{M(fL(q - Uv) + q(-r = Uw))}{dfLM - qr}$$
$$z_7 = M - \frac{MUw}{r}$$

Karena dari asumsi $p > 0$ maka $\lambda_1 > 0$ sehingga titik tetap E_0 bersifat tidak stabil. Titik tetap E_1 bersifat stabil jika

$$U > max\left\{\frac{cK + q}{v}, \frac{eK + r}{w}\right\}$$

Titik tetap E_2 bersifat stabil jika

$$U > \frac{eKpq + (acKL + pq)r - cfpKL - aeqKL - fpqL}{w(acKL + pq) - v(aeKL + fpL)}$$

dengan $w(acKL + pq) - v(aeKL + fpL) > 0$

Titik tetap E_3 bersifat stabil jika

$$U > \frac{q(beKM + pr) + cKpr - M(bcrK + depK + dpr)}{v(beKM + pr) - Mw(bcK - dp)}$$

dengan $v(beKM + pr) - Mw(bcK - dp) > 0$

Dengan cara yang sama yaitu memeriksa nilai-nilai eigen, maka titik tetap E_5, E_6, E_7 dapat ditentukan.

Teorema 1 (Chattopadhyay et al., 1996)

Titik tetap interior E_4 adalah stabil global asimtotik jika

i. $a = c, b = e$

ii. $\frac{4rq}{LM} > (d+f)^2$

Bukti:

Pilih fungsi Liapunov

$$\begin{aligned} V(x,y,z) &= V_1(x) + V_2(y) + V_3(z) \\ &= (x - x^*) - x^*\ln(\tfrac{x}{x^*}) \\ &+ (y - y^*) - y^*\ln(\tfrac{y}{y^*}) \\ &+ (z - z^*) - z^*\ln(\tfrac{z}{z^*}) \end{aligned}$$

Dengan $x, y, z > 0$ dan x^*, y^*, z^* adalah konstanta positif.

Untuk $x = x^*$, $y = y^*$, $z = z^*$ maka $V(x,y,z)$ adalah nol. Untuk $(x,y,z) > 0$ akan ditunjukkan:

i. Jika $x > x^*$, $y > y^*$, $z > z^*$ maka $V(x,y,z)$ adalah positif.

ii. Jika $x < x^*$, $y < y^*$, $z < z^*$ maka $V(x,y,z)$ adalah positif.

Dengan kata lain, akan ditunjukkan $V(x,y,z)$ adalah fungsi definit positif untuk $(x,y,z) \neq (x^*, y^*, z^*)$.

i. Untuk $x > x^*$. Misalkan terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga $x = x^* + \varepsilon$.

$$\begin{aligned} V_1(x^* + \varepsilon) &= (x - x^*) - x^*\ln(\frac{x}{x^*}) \\ &= \varepsilon - x^*\ln(\tfrac{x^*+\varepsilon}{x^*}) \\ &= \varepsilon - x^*\ln(1 + \tfrac{\varepsilon}{x^*}) \end{aligned}$$

Jika kedua ruas dibagi dengan x^*, diperoleh

$$\frac{V_1(x^* + \varepsilon)}{x^*} = \frac{\varepsilon}{x^*} - \ln(1 + \frac{\varepsilon}{x^*})$$

Misalkan $p = \frac{\varepsilon}{x^*}$ maka $p > 0$ sehingga $\frac{V_1(x^*+\varepsilon)}{x^*} = p - \ln(1+p)$.

Akan dibuktikan bahwa

$$\begin{aligned} \tfrac{V_1(x^*+\varepsilon)}{x^*} > 0 &\Leftrightarrow p > \ln(1+p) \\ &\Leftrightarrow e^p > \ln(1+p) \\ &\Leftrightarrow e^p - p - 1 > 0 \end{aligned}$$

Bukti:

Misalkan $f(p) = e^p - p - 1$ maka akan ditunjukkan $f(p) > 0$. $f'(p) = e^p - 1$. Karena $p > 0$, maka $e^p > 1$, sehingga $f'(p) > 0$. Dari teorema, $f(p)$ merupakan fungsi naik untuk $p > 0$, sehingga $f(p) > f(0)$ jika dan hanya jika

$e^p - p - 1 > e^0 - 0 - 1$, jika $p > 0$. Ini berarti $\frac{V_1(x^*+\varepsilon)}{x^*} > 0$. Akibatnya $V_1(x) > 0$. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa $V_2(y) > 0$ dan $V_3(z) > 0$ untuk $y > y^*, z > z^*$.

ii. Untuk $x < x^*$. Misalkan terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga $x = x^* - \varepsilon$.

$$\begin{aligned} V_1(x^* - \varepsilon) = {} & (x^* - \varepsilon - x^*) \\ & - x^*\ln(\frac{x^* - \varepsilon}{x^*}) \end{aligned}$$

$$= -\varepsilon - x^*\ln(1 - \frac{\varepsilon}{x^*})$$

Jika kedua ruas dibagi dengan x^* diperoleh $\frac{V_1(x^*-\varepsilon)}{x^*} = -\frac{\varepsilon}{x^*} - \ln(1 - \frac{\varepsilon}{x^*})$.

Misalkan $p = \frac{\varepsilon}{x^*}$ maka $p > 0$ sehingga $\frac{V_1(x^*-\varepsilon)}{x^*} = -p - \ln(1 - p)$.

Fungsi $\ln(1 - p)$ terdefinisi jika $1 - \mathrm{p} > 0 \Leftrightarrow p < 1$. Karena $p > 0$, maka $0 < p < 1$ Akan dibuktikan bahwa

$$\frac{V_1(x^*-\varepsilon)}{x^*} > 0 \Leftrightarrow -p > \ln(1 + p)$$

$$\Leftrightarrow e^p > \ln(1 + p)$$

$$\Leftrightarrow e^p - p - 1 > 0$$

Bukti.

Misalkan $f(p) = e^{-p} + p - 1$ maka akan ditunjukkan $f(p) > 0$. $f'^{(p)} = -e^{-p} + 1$. Nilai $e^{-p} < 1$, untuk $p > 0$ akibatnya $f'(p) > 0$ untuk $0 < p < 1$. Dari teorema, $f(p)$ merupakan fungsi naik untuk $0 < p < 1$, sehingga $f(p) > f(0)$ jika dan hanya jika

$$e^p + p - 1 > e^0 + 0 - 1 \Leftrightarrow e^p > 1 - p.$$

Ini berarti jika $p > 0$. Ini berarti $\frac{V_1(x^*-\varepsilon)}{x^*} > 0$. Akibatnya $V_1(x) > 0$. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa $V_2(y) > 0$ dan $V_3(z) > 0$ untuk $y < y^*, z < z^*$.

Dari (i) dan (ii) terbukti bahwa $V(x,y,z) > 0$ untuk $x,y,z > 0$ dengan x^*, y^*, z^* adalah konstanta positif, sehingga $V(x,y,z)$ adalah fungsi definit positif.

Berikut ini diberikan contoh titik-titik tetap sistem persamaan diferensial (1) beserta kestabilannya. Misalkan nilai-nilai parameter yang diberikan:

$p = 2.5, q - 2, r = 2.5, K = 350000,$
$L = 220000, M = 225000, a =$
$2.5x10^{-6}$, $b = 1.2x10^{-6}, c = 2.5x10^{-6}$,
$d = 1.55x10^{-5}$ $e = 1.2x10^{-6}$,
$f = 3.75x10^{-6}, v = 1.47x10^{-4}$,
$w = 2.57x10^{-4}$, yang memenuhi syarat Teorema 1, maka kestabilan titik-titik tetapnya adalah:

1. $E_0\{0,0,0\}$ tak stabil (repellor),
2. $E_1\{350000,0,0\}$ tak stabil (titik sadel),
3. $E_2\{291154.,168130.,0\}$ tak stabil (titik sadel),
4. $E_3\{337777.,0,\ 72753.7\}$ tak stabil (titik sadel),
5. $E_4\{301407.,126253.,26215,4\}$ tak stabil (titik sadel),
6. $E_5\{0, 88062.9, 0\}$ tak stabil (titik sadel),
7. $E_6\{0, 61748.9, 15433.5\}$ tak stabil (titik sadel),
8. $E_7\{0, 0, 36273.7\}$ tak stabil (titik sadel).

Kesimpulan

Dengan mengonstruksi fungsi Liapunov yang sesuai dan membuat beberapa batasan parameter, sistem interaksi tiga spesies ikan dengan dua spesies yang saling berkompetisi seperti yang dimodelkan pada karya ilmiah ini bersifat stabil asimtotik global pada beberapa wilayah parameter.

Pustaka

Anton, H. 2000. *Dasar-dasar Aljabar Linear*. Jilid 2. Terjemahan Hari Suminto. Interaksara, Batam.

Chattopadhyay, J., Mukhopadhyay, A., and Tapaswi, P. K.1996. A resource based competitive system in three species fishery. *Nonlinear Studies* 3(1):73-84.

Fisher, S.D. 1990. *Complex Variables*. Second Edition. Wadsword & Brooks/ ColeBooks & Software, Pasific Grove. California.

Kreyszig, E. 1983. *Advanced Engineering Mathematics.* Fifth Edition. John Wiley and Sons. New York.

Leon, T.J. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya*. Edisi ke-5. Terjemahan Alit Bondan. Erlangga, Jakarta.

Smith, P. 1987. *Nonlinear Ordinary Differential Equations*. Clarendon Press. Oxford.

Tu, P. N. V. 1994. *Dynamical Systems : An Introduction with Applications in Economics and Biology*. Second Revised and Enlarged Edition. Springer Verlag. Berlin.