JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS AND APPLICATIONS (JFMA), Vol. 1, No. 1 (June 2018)
Available online at www.jfma.matematika.undip.ac.id

SOLUSI LEMAH MASALAH DIRICHLET PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL LINEAR ELIPTIK ORDER DUA

Sekar Nugraheni[1], Christiana Rini Indrati[2]

[1,2]*Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada*
Sekip Utara BLS 21 Yogyakarta, Indonesia, 55281
Email : [1]sekar.nugraheni@ugm.ac.id, [2]rinii@ugm.ac.id

Abstract. The weak solution is one of solutions of the partial differential equations, that is generated from derivative of the distribution. In particular, the definition of a weak solution of the Dirichlet problem for second order linear elliptic partial differential equations is constructed by the definition and the characteristics of Sobolev spaces on Lipschitz domain in $\mathbb{R}^n$. By using the Lax Milgram Theorem, Alternative Fredholm Theorem and Maximum Principle Theorem, we derived the sufficient conditions to ensure the uniqueness of the weak solution of Dirichlet problem for second order linear elliptic partial differential equations. Furthermore, we discussed the eigenvalue of Dirichlet problem for second order linear elliptic partial differential equations with respect to the weak solution.
Keywords: Dirichlet problem, Sobolev space, weak solution.

Abstrak. Solusi lemah merupakan salah satu jenis penyelesaian persamaan diferensial parsial yang didasarkan pada derivatif distribusi. Pada paper ini pendefinisian solusi lemah dibangun berdasarkan definisi dan karakteristik ruang Sobolev. Untuk penentuan syarat batas ditentukan berdasarkan salah satu sifat anggota ruang Sobolev pada domain Lipschitz di $\mathbb{R}^n$. Selanjutnya, dengan memanfaatkan Teorema Lax-Milgram, Teorema Alternatif Fredholm dan Teorema Asas Maksimum, diberikan syarat cukup untuk menjamin ketunggalan solusi lemah masalah Dirichlet persamaan diferensial parsial eliptik order dua. Lebih lanjut, dibahas mengenai nilai eigen masalah Dirichlet persamaan diferensial parsial linear eliptik order dua dalam kaitannya dengan solusi lemahnya.
Kata kunci: Masalah Dirichlet, ruang Sobolev, solusi lemah

I. PENDAHULUAN

Suatu persamaan diferensial parsial yang dilengkapi dengan syarat batas yang memberikan nilai fungsi tak diketahui untuk variabel tak bebasnya pada batas-batas domain dinamakan dengan masalah Dirichlet. Diperhatikan bahwa solusi persamaan diferensial merupakan fungsi terdiferensial kontinu dari variabel-variabel bebas dan memenuhi persamaan diferensial tersebut. Akan tetapi, tidak semua fungsi yang memenuhi persamaan diferensial mempunyai derivatif.

Pada tahun 1935, Sergei Sobolev, memperkenalkan fungsi tergeneralisasi yang kemudian dikenal dengan sebutan distribusi. Diperhatikan derivatif fungsi terintegral lokal belum tentu ada, tetapi derivatif distribusi yang dibangkitkan dari fungsi terintegral lokal dapat ditentukan [5]. Dengan memanfaatkan fakta tersebut, diperoleh definisi derivatif baru yang disebut sebagai derivatif lemah. Dari definisi derivatif lemah tersebut, akan dibangun definisi solusi lemah untuk masalah Dirichlet persamaan diferensial parsial linear eliptik order dua. Khususnya, dengan memanfaatkan beberapa penjelasan mengenai sifat-sifat yang berkaitan dengan ruang Sobolev [3].

Salah satu sifat penting ruang Sobolev yang digunakan untuk menentukan solusi lemah yaitu ruang Sobolev *embedded* secara kompak ke $\mathcal{L}^2(\Omega)$ [1]. Selain itu, dapat ditunjukkan bahwa setiap anggota ruang Sobolev bernilai nol pada himpunan titik batas domainnya [2]. Akan tetapi sifat ini hanya berlaku untuk himpunan tertentu yaitu pada domain Lipschitz. Hal ini mendasari Savare untuk membahas solusi persamaan eliptik pada domain Lipschitz [6]. Sedangkan Jerison membahas mengenai masalah Dirichlet non homogen pada Domain Lipschitz [4]. Pada penelitian ini akan dibahas mengenai syarat cukup dan perlu untuk menjamin eksistensi dan ketunggalan solusi lemah dari masalah Dirichlet persamaan diferensial parsial linear eliptik order dua. Lebih lanjut, akan dibahas mengenai nilai eigen masalah Dirichlet persamaan diferensial parsial linear eliptik order dua yang berkaitan dengan solusi lemahnya. Tulis pendahuluan disini. Gunakan *citation style* IEEE untuk menuliskan sitasi, sehingga disarankan menggunakan kalimat pasif ketika menuliskan *literature review*. Penulis disarankan untuk menggunakan software reference manager seperti Mendeley atau fitur *Citations & Bibliography* di Ms Word untuk menuliskan sitasi referensi dan menyusun daftar pustaka. Sebagai contoh, perhatikan paragraf berikut.

II. RUANG SOBOLEV

Diberikan himpunan terbuka Ω di $\mathbb{R}^n$. Koleksi semua fungsi $\phi \in C^\infty(\Omega)$ yang memiliki support kompak, dinotasikan dengan $C_c^\infty(\Omega)$, disebut dengan ruang fungsi tes. Khususnya, fungsi $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, dengan $\phi(x) \geq 0$, $\int_\Omega \phi = 1$ dan $\text{supp}\,(\phi) \subseteq \{x \in \Omega : \|x\| \leq 1\}$ yang dikenal dengan sebutan mollifier. Distribusi adalah pemetaan linear kontinu dari ruang fungsi tes ke $\mathbb{R}$. Koleksi semua distribusi pada $C_c^\infty(\Omega)$ dinotasikan dengan $D'(\Omega)$.

Salah satu contoh distribusi adalah fungsi yang dibangkitkan oleh fungsi terintegral lokal. Fungsi terukur Lebesgue $f: \Omega \to \mathbb{R}$ dikatakan terintegral lokal, jika untuk setiap himpunan kompak $K \subset \Omega$, $\int_K |f(x)|\, dx < \infty$. Koleksi semua fungsi terintegral lokal, dinotasikan dengan $\mathcal{L}_{loc}^1(\Omega)$. Diperhatikan bahwa semua fungsi kontinu merupakan fungsi terintegral lokal. Lebih lanjut, jika $f \in \mathcal{L}_{loc}^1(\Omega)$, maka fungsi $\tilde{f}(\phi) = \int_\Omega f(x)\phi(x)\, dx$, untuk setiap $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, merupakan distribusi. Lebih lanjut, pemetaan $T: \mathcal{L}_{loc}^1(\Omega) \to D'(\Omega)$, dengan $T(f) = \tilde{f}$, untuk setiap $f \in \mathcal{L}_{loc}^1(\Omega)$, merupakan pemetaan linear dan injektif.

Selanjutnya, derivatif distribusi dengan multi indeks α, $\partial^\alpha: D'(\Omega) \to D'(\Omega)$, didefinisikan dengan

$$\partial^\alpha T = (-1)^{|\alpha|} T \circ D^\alpha = T \circ (-D)^\alpha,$$

untuk setiap $T \in D'(\Omega)$.

Selanjutnya, didefinisikan derivatif baru yang disebut sebagai derivatif lemah berikut.

Definisi 2.1. *Diberikan $f, g \in \mathcal{L}_{loc}^1(\Omega)$ dan multi indeks α. Fungsi g disebut derivatif lemah tingkat α dari f di Ω, jika*

$$\partial^\alpha \tilde{f} = \tilde{g}.$$

Diperhatikan bahwa koleksi semua fungsi $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ sehingga terdapat $g \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ dengan sifat $\partial \tilde{f} = \tilde{g}$, dinotasikan dengan $W^{1,2}(\Omega)$, disebut dengan ruang Sobolev. Ruang

Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$ merupakan ruang Hilbert terhadap inner product $\langle .,. \rangle_{1,2}: W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$, sehingga

$$\langle f_1, f_2 \rangle_{1,2} = \int_\Omega f_1(x) f_2(x)\, dx + \int_\Omega g_1(x) g_2(x)\, dx,$$

untuk setiap $f_1, f_2 \in W^{1,2}(\Omega)$, dengan g_1 dan g_2 berturut-turut derivatif lemah tingkat 1 dari f_1 dan f_2. Berdasarkan sifat ruang Lebesgue, yaitu $\mathcal{L}^2(\Omega) = cl\left(C\big(cl(\Omega)\big)\right)$ dan Teorema Meyer-Serrin yang menyatakan bahwa

$$W^{1,2}(\Omega) = cl\left\{f \in C^1(\Omega) : \int_\Omega |f(x)|^2\, dx + \int_\Omega |Df(x)|^2\, dx\right\},$$

maka diperoleh sifat bahwa $W^{1,2}(\Omega) = cl\left(C^1\big(cl(\Omega)\big)\right)$.

Selanjutnya, didefinisikan

$$W_c^{1,2}(\Omega) = cl(C_c^1(\Omega)).$$

Ruang $W_c^{1,2}(\Omega)$ inilah yang selanjutnya menjadi dasar pendefinisian solusi lemah masalah Dirichlet persamaan diferensial linear eliptik order dua.

Lebih lanjut, diberikan salah satu sifat yang menyatakan hubungan antara ruang Sobolev $W_c^{1,2}(\Omega)$ dengan ruang fungsi terintegral Lebesgue berikut.

Teorema 2.2. (Teorema Embedding *Sobolev*) *Jika $f \in W_c^{1,2}(\Omega)$ maka $f \in \mathcal{L}^{2^*}(\Omega)$, dengan*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2^*} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}, & n \geq 3, \\ 2^* = 2, & n = 2. \end{cases}$$

Lebih lanjut, $\|f\|_{2^*} \leq C_n \|f\|_2$, untuk suatu $C_n \in \mathbb{R}$.

Bukti. Diambil sebarang $g \in C_c^1(\Omega)$. Dengan memanfaatkan Teorema Fubini-Tonelli, diperoleh

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^{\frac{n}{n-1}}\, dx \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial g(x)}{\partial x_i}\right| dx\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Akibatnya,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^{\frac{n}{n-1}}\, dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla g(x)\|\, dx. \qquad (1)$$

Diambil sebarang $f \in W_c^{1,2}(\Omega)$. Dengan demikian, terdapat barisan $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq C_c^1(\Omega)$ sehingga $f_j \to f$ di $W^{1,2}(\Omega)$. Diperhatikan bahwa untuk setiap $j \in \mathbb{N}$,

$$\left\|\nabla |f_j|^{\frac{2n-2}{n-2}}\right\| = \frac{2n-2}{n-2} |f_j|^{\frac{2n-2}{n-2}} \|\nabla f_j\|.$$

Dengan demikian, berdasarkan (1) diperoleh

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_j|^{\frac{2n}{n-2}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2n-2}{n-2} \int_{\mathbb{R}^n} |f_j|^{\frac{2n-2}{n-2}} \|\nabla f_j\|.$$

Jadi, untuk setiap $j \in \mathbb{N}$, $f_j \in \mathcal{L}^{2^*}(\Omega)$ dan $\|f_j\|_{2^*} \leq C_n \|\nabla f_j\|_2$, dengan $C_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2n-2}{n-2}$. Dengan demikian, diperoleh $f \in \mathcal{L}^{2^*}(\Omega)$ dan $\|f\|_{2^*} \leq C_n \|\nabla f\|_2$. ■

Diperhatikan bahwa $\mathcal{L}^2(\Omega)$ lebih luas dibandingkan dengan $\mathcal{L}^{2^*}(\Omega)$. Dapat ditunjukkan bahwa $W_c^{1,2}(\Omega)$ *embedding* di $\mathcal{L}^2(\Omega)$ dengan pemetaan identitas $I: W_c^{1,2}(\Omega) \to \mathcal{L}^2(\Omega)$ tidak hanya linear kontinu tetapi kompak.

Selanjutnya, pada Teorema 2.4. dibahas mengenai salah satu sifat anggota ruang Sobolev $W_c^{1,2}(\Omega)$, yaitu untuk setiap $u \in W_c^{1,2}(\Omega)$ jika dan hanya jika $u = O$ pada $\partial\Omega$. Akan tetapi, menurut pembahasan Sawyer [3] sifat ini hanya berlaku untuk himpunan Ω yang didefinisikan pada Definisi 2.3. berikut.

Definisi 2.3. *Diketahui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ terbuka dan terhubung dan*

$$Q = \{u \in \mathbb{R}^n : |y_i| \leq 1, 1 \leq i \leq n\},$$
$$Q_0 = \{y \in Q : y_n = 0\}, \text{ dan}$$
$$Q_+ = \{y \in Q : y_n > 0\}.$$

Himpunan Ω disebut domain Lipschitz, jika untuk setiap $x_0 \in \partial\Omega$, terdapat persekitaran Ω_{x_0} dan pemetaan bijektif $f: \Omega_{x_0} \to Q$, dengan sifat

1. *terdapat $K \geq 0$, sehingga untuk setiap $y, z \in \Omega_{x_0}$,*
$$\|f(y) - f(z)\| \leq K\|y - z\|,$$
2. *$f(\partial\Omega \cap \Omega_{x_0}) = Q_0$, dan*
3. *$f(\Omega \cap \Omega_{x_0}) = Q_+$.*

Lebih lanjut, dalam pembuktian Teorema 2.4, diperlukan beberapa sifat operator trace. Operator $\gamma: W^{1,2}(\Omega) \to \mathcal{L}^2(\partial\Omega)$ disebut operator trace, jika γ linear dan $\gamma(u)(x) = u(x)$, untuk setiap $x \in \partial\Omega$ dan $u \in \mathcal{L}^2(cl(\Omega))$. Dapat ditunjukkan bahwa jika $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domain Lipschitz terbatas maka terdapat dengan tunggal operator trace $\gamma: W^{1,2}(\Omega) \to \mathcal{L}^2(\partial\Omega)$, dengan sifat $R(\gamma)$ dense di $\mathcal{L}^2(\partial\Omega)$.

Teorema 2.4. *Diketahui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domain Lipschitz terbatas dan $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Fungsi $u \in W_c^{1,2}(\Omega)$ jika dan hanya jika $u = O$ pada $\partial\Omega$.*

Bukti. Karena $u \in W_c^{1,2}(\Omega)$ maka terdapat $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq C_c^1(\Omega)$, sehingga $u_j \to u$. Karena $\gamma(u_j) = O$ dan γ kontinu maka terbukti $u = O$ pada $\partial\Omega$. Sebaliknya, diambil sebarang bilangan $\epsilon > 0$ dan dipilih himpunan terbatas $A \subseteq \Omega$, dengan sifat

$$\inf\{d(x, \partial\Omega) : x \in A\} > 0$$

dan $\|u_\epsilon\|_{1,2} < \frac{\epsilon}{2}$, dengan

$$u_\epsilon = \begin{cases} u(x), & x \in A, \\ 0, & x \in \Omega \setminus A. \end{cases}$$

Jadi, $\|u_\epsilon - u\|_{1,2} < \frac{\epsilon}{2}$. Diambil sebarang $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ mollifier dan dipilih $\rho > 0$ sehingga $\|\phi_\rho * u_\epsilon - u_\epsilon\|_{1,2} < \frac{\epsilon}{2}$, dengan $\phi_\rho(x) = \rho^{-n}\phi\left(\frac{x}{\rho}\right)$. Akibatnya, $\phi_\rho * u_\epsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ dan $\|\phi_\rho * u_\epsilon - u\|_{1,2} < \epsilon$. Dengan kata lain, terbukti $u \in W_c^{1,2}(\Omega)$. ■

III. SOLUSI LEMAH MASALAH DIRICHLET

Diketahui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ domain Lipschitz terbatas dan. Operator diferensial parsial linear order dua, dinotasikan dengan $L: W^{1,2}(\Omega) \to \mathcal{L}^2(\Omega)$, mempunyai rumus umum

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + bu, \tag{2}$$

dengan $a^{i,j}$ dan b merupakan fungsi bernilai real terukur dan terbatas pada Ω, untuk setiap $i,j = 1,2,\dots,n$, dan $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Operator L disebut operator diferensial parsial linear eliptik order dua, jika terdapat $\lambda \in \mathbb{R}$ sehingga $a^{i,j}\xi_i\xi_j \geq \lambda\|\xi\|^2$, untuk setiap $x \in \Omega$ dan $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

Selanjutnya, dengan memanfaatkan ruang Sobolev $W_c^{1,2}(\Omega)$, diberikan definisi mengenai solusi lemah masalah Dirichlet untuk persamaan diferensial parsial linear eliptik order dua berikut.

Definisi 3.1. *Diketahui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ domain Lipschitz terbatas dan untuk setiap $i = 1,2,\dots,n$, fungsi bernilai real $f^i, g \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, dan $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$. Fungsi $u \in W^{1,2}(\Omega)$ disebut sebagai solusi lemah masalah Dirichlet*

$$\begin{cases} L(u) = g + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x_i}, & \text{pada } \Omega, \\ u = \varphi, & \text{pada } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

jika $u - \varphi \in W_c^{1,2}(\Omega)$ dan

$$\widetilde{L(u)} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + bu\right)^{\sim} = \left(g + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f^i}{\partial x_i}\right)^{\sim}.$$

Selanjutnya, akan diberikan syarat cukup untuk masalah Dirichlet (3) sehingga ketunggalan solusi lemahnya terjamin. Dalam membuktikan hal tersebut diperlukan Teorema Asas Maksimum dan Teorema Fredholm Alternatif berikut.

Teorema 3.2. (Teorema Asas Maksimum) *Diketahui Ω himpunan bagian terbuka dan terbatas di $\mathbb{R}^n$ dan L operator diferensial parsial linear eliptik order dua, dengan $b(x) \leq 0$. Jika $u \in W^{1,2}(\Omega)$, sehingga $L(u) = O$, maka*

$$\sup\{|u(x)| : x \in \Omega\} \leq \sup\{|u(x)| : x \in \partial\Omega\}.$$

Bukti. Untuk setiap $u \in W^{1,2}(\Omega)$, didefinisikan $u_+(x) = \text{maks}\{u(x), 0\}$. Lebih lanjut, didefinisikan $\beta = \sup\{u_+(x) : x \in \partial\Omega\}$ dan $v(x) = (u_+ - \beta)_+(x)$. Diperhatikan bahwa $v \in W_c^{1,2}(\Omega)$ dan $\nabla v = O$ hampir dimana-mana pada Ω. Dipilih $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ mollifier dan $\Omega_h = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > h\}$. Dibentuk $v * \phi_h \in C^\infty(\Omega)$, dengan $\phi_h(x) = h^{-n}\phi\left(\frac{x}{h}\right)$. Diperhatikan bahwa $v * \phi_h \to v$ dan $\nabla(v * \phi_h) = O$. Akibatnya, $v = O$. Dengan kata lain, $u_+(x) \leq \beta$. Selanjutnya karena $L(-u) = O$ maka dengan cara yang sama diperoleh $(-u)_+(x) \leq \beta$. Akibatnya, $|u(x)| = u_+(x) + (-u)_+(x) \leq \sup\{|u(x)| : x \in \partial\Omega\}$. Jadi, terbukti bahwa $\sup\{|u(x)| : x \in \Omega\} \leq \sup\{|u(x)| : x \in \partial\Omega\}$. ∎

Teorema 3.3. ***(Teorema Fredholm Alternatif)*** *Diketahui X ruang Hilbert dan K operator kompak pada X. Dibentuk $A = I - K$ maka $R(A)$ tertutup di X dan $\dim N(A) = \dim N(A^*)$ berhingga. Lebih lanjut, $R(A) = X$ dan $N(A) = \{\theta\}$ atau $R(A) \neq X$ dan $N(A) \neq \{\theta\}$.*

Bukti. Dapat ditunjukkan bahwa terdapat $C > 0$, dengan sifat untuk setiap $x \in X$, berlaku $d\big(x, N(A)\big) \leq C\|A(x)\|$. Akibatnya, $R(A)$ tertutup. Lebih lanjut, karena $N(A)$ dan $N(A^*)$ kompak sekuensial, maka $N(A)$ dan $N(A^*)$ berdimensi hingga. Terlebih dahuku akan ditunjukkan bahwa jika $\dim N(A^*) = 0$ maka $\dim N(A)=0$. Diperhatikan bahwa $R(A) = N(A^*)^{\perp} = X$. Andaikan terdapat $x_1 \neq \theta$ sehingga $A(x_1) = \theta$. Karena $R(A) = X$ maka apabila dilanjutkan diperoleh barisan $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq X$, sehingga $A\big(x_j\big) = x_{j-1}$. Diperhatikan bahwa untuk setiap $j \in \mathbb{N}$, A^j linear kontinu, $\|A^j\| \leq \|A\|^j$, dan $N\big(A^{j-1}\big) \subseteq N(A^j)$. Akibatnya, untuk setiap $j \in \mathbb{N}$, terdapat $z_j \in N(A^j)$, dengan sifat $\|z_j\| = 1$ dan $d\left(z_j, N\big(A^{j-1}\big)\right) > \frac{1}{2}$, tetapi $\|K\big(z_j\big) - K(z_k)\| > \frac{1}{2}$. Terjadi kontradiksi dengan K operator kompak. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa jika $\dim N(A) = 0$ maka $\dim N(A^*) = 0$. Selanjutnya, andaikan $\dim N(A) = j > 0$ dan $\dim N(A^*) = k > 0$. Misalkan $\{x_1, x_2, \dots, x_j\}$ basis ortonormal $N(A)$ dan $\{x'_1, x'_2, \dots, x'_k\}$ basis ortonormal $N(A^*)$. Andaikan terdapat $x_0 \in N(A)$ dan $x'_0 \in N(A^*)$ sehingga $\langle x_m, x'_0\rangle = 0$, untuk setiap $1 \leq m < j$ dan $\langle x_j, x'_0\rangle \neq 0$ serta $\langle x_0, x'_m\rangle = 0$, untuk setiap $1 \leq m < k$ dan $\langle x_0, x'_k\rangle \neq 0$. Dibentuk operator kompak $K_0(x) = \langle x, x'_0\rangle x_0$ dan $K_0^*(x') = \langle x_0, x'\rangle x'_0$. Diperhatikan bahwa $\dim N(A - K_0) = j - 1$ dan $\dim N(A^* - K_0^*) = k - 1$. Jika $j - 1 = 0$ atau $k - 1 = 0$, maka berdasarkan pembahasan sebelumnya terbukti $j = k$. Jika tidak demikian maka proses dilanjutkan, hingga terbukti bahwa $\dim N(A) = \dim N(A^*)$. ■

Dengan memanfaatkan Teorema Asas Maksimum dan Teorema Fredholm Alternatif tersebut, pada Teorema 3.4. diberikan syarat cukup untuk masalah Dirichlet homogen sehingga ketunggalan solusi lemahnya terjamin.

Teorema 3.4. *Diketahui Ω domain Lipschitz terbatas. Jika diberikan masalah Dirichlet homogen*

$$\begin{cases} L(u) = g + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x_i}, & \text{pada } \Omega, \\ u = 0, & \text{pada } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

dengan $b(x) \leq 0$ pada Ω, maka solusi lemahnya tunggal $u \in W_c^{1,2}(\Omega)$.

Bukti. Didefinisikan fungsi $\Lambda : W_c^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dan $B: W_c^{1,2}(\Omega) \times W_c^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ sehingga

$$\Lambda(\psi) = \int_\Omega \left(g\psi - \sum_{i=1}^{n} f^i \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)$$

dan

$$B(u,\psi) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j} \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \int_\Omega bu\psi.$$

Diperhatikan bahwa Λ linear dan

$$|\Lambda(\psi)| \leq \left(\|g\|_2 + \sum_{i=1}^{n} \|f^i\|_2\right) \|\psi\|_{1,2}.$$

Dengan demikian, Λ merupakan anggota ruang dual $\left(W_c^{1,2}(\Omega)\right)^*$. Fungsi B merupakan fungsional seskulinear pada $W_c^{1,2}(\Omega) \times W_c^{1,2}(\Omega)$. Lebih lanjut karena untuk setiap $i, j = 1,2, \dots, n$, $a^{i,j}$ dan b merupakan fungsi terukur dan terbatas maka terdapat $M_1, M_2 > 0$ sehingga untuk setiap $i, j = 1,2, \dots, n$ diperoleh

$$\sup\{|a^{i,j}(x)| : x \in \Omega\} \leq M_1$$
$$\text{dan } \sup\{|b(x)| : x \in \Omega\} \leq M_2$$

Akibatnya, untuk setiap $u, \psi \in W_c^{1,2}(\Omega)$ diperoleh

$$|\mathrm{B}(u,\psi)| \leq \max\{M_1, M_2\} \|u\|_{1,2} \|\psi\|_{1,2}.$$

Andaikan terdapat $c > 0$ sehingga $b(x) \leq -c < 0$. Dengan demikian, untuk setiap $\psi \in W_c^{1,2}(\Omega)$

$$\|\psi\|_{1,2}^2 = \int_\Omega (|\psi|^2 + |\nabla\psi|^2) \leq \frac{1}{\min\{M_1, c\}} B(\psi, \psi).$$

Akibatnya, menurut Teorema Lax Milgram, terdapat dengan tunggal $u \in W_c^{1,2}(\Omega)$, sehingga $\Lambda(\psi) = B(u, \psi)$. Dengan kata lain, terbukti terdapat dengan tunggal $u \in W_c^{1,2}(\Omega)$ yang memenuhi masalah Dirichlet (4). Lebih lanjut, andaikan asumsi bahwa terdapat $c > 0$ sehingga $b(x) \leq -c < 0$ tidak terpenuhi. Dipilih bilangan $\sigma > 0$ sehingga

$$\sigma > \sup\{|b(x)| : x \in \Omega\}.$$

Didefinisikan L_σ dan B_σ sehingga $L_\sigma(u) = L(u) - \sigma u$ dan

$$B_\sigma(u, \psi) = B(u, \psi) + \sigma \int_\Omega u\psi.$$

Lebih lanjut, didefinisikan $\hat{I} : \mathcal{L}^2(\Omega) \to \left(W_c^{1,2}(\Omega)\right)^*$, sehingga $\hat{I}(u)(\psi) = \tilde{u}(\psi)$. Diperhatikan bahwa berdasarkan Teorema Embedding Sobolev, terdapat operator kompak $I^* : W_c^{1,2}(\Omega) \to \mathcal{L}^2(\Omega)$. Akibatnya, pemetaan $\bar{I} = \hat{I} \circ I^*$ merupakan operator bijektif dan kompak. Dengan demikian, $B_\sigma(u, \psi) = \widetilde{L_\sigma(u)} + \sigma I(u) = -\Lambda$ memenuhi asumsi Teorema Lax Milgram. Jadi, diperoleh pemetaan terbatas $L_\sigma{}^{-1}$ dan memenuhi

$$\left(I - \left(-\sigma L_\sigma{}^{-1}\bar{I}\right)\right)(u) = -L_\sigma{}^{-1}(\Lambda).$$

Karena $-\sigma L_\sigma{}^{-1}\bar{I}$ merupakan operator kompak maka berdasarkan Teorema Alternatif Fredholm diperoleh

$$N\left(I - \left(-\sigma L_\sigma{}^{-1}\bar{I}\right)\right) = \{O\}$$

jika dan hanya jika

$$R\left(I - \left(-\sigma L_\sigma{}^{-1}\bar{I}\right)\right) = W_c^{1,2}(\Omega).$$

Diperhatikan untuk setiap $u^* \in W_c^{1,2}(\Omega)$, sehingga $\left(I - \left(-\sigma L_\sigma{}^{-1}\bar{I}\right)\right)(u^*) = O$. Akibatnya, $Lu^* = O$. Karena $b(x) \leq 0$ maka menurut Teorema Asas Maksimum diperoleh

$$\sup\{|u^*(x)| : x \in \Omega\} \leq \sup\{|u^*(x)| : x \in \partial\Omega\} = 0.$$

Dengan kata lain $u^* = 0$. Jadi,

$$R\left(I - \left(-\sigma L_\sigma{}^{-1}\bar{I}\right)\right) = W_c^{1,2}(\Omega).$$

Akibatnya, terbukti bahwa terdapat dengan tunggal $\bar{u} \in W_c^{1,2}(\Omega)$ solusi masalah Dirichlet homogen (4). ∎

Diperhatikan bahwa berdasarkan pembahasan pada bukti Teorema 3.4. diperoleh kejadian khusus sebagai berikut.

Akibat 3.5. *Diketahui Ω domain Lipschitz terbatas. Jika diberikan masalah Dirichlet homogen*

$$\begin{cases} L(u) = 0, & pada\ \Omega, \\ u = 0, & pada\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

dengan $b(x) \leq 0$ pada Ω, maka solusi lemahnya tunggal $u = 0 \in W_c^{1,2}(\Omega)$.

Lebih lanjut, ditinjau untuk masalah Dirichlet secara umum. Akan ditunjukkan bahwa dengan asumsi yang sama ketunggalan masalah Dirichlet masih terjamin.

Teorema 3.6. *Diketahui Ω domain Lipschitz terbatas. Jika diberikan masalah Dirichlet homogen*

$$\begin{cases} L(u) = g + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x_i}, & pada\ \Omega, \\ u = \psi, & pada\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

dengan $b(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in \Omega$, maka solusi lemah $u \in W^{1,2}(\Omega)$ tunggal.

Bukti. Dibentuk $v = u - \psi$. Akibatnya, $u \in W^{1,2}(\Omega)$ merupakan solusi masalah Dirichlet (6) jika dan hanya jika $v \in W_c^{1,2}(\Omega)$ memenuhi

$$\begin{aligned} L(v) &= L(u) - L(\psi) \\ &= g - b\psi + \textstyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f^i - \sum_{j=1}^{n} a^{i,j} \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right) \\ &= \hat{g} + \textstyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \widehat{f^i}}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh masalah Dirichlet baru

$$\begin{cases} L(v) = \hat{g} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \widehat{f^i}}{\partial x_i}, & \text{pada } \Omega, \\ v = 0, & \text{pada } \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

Berdasarkan Teorema 3.4. terdapat dengan tunggal $v \in W_c^{1,2}(\Omega)$ solusi lemah masalah Dirichlet (7). Akibatnya, terbukti terdapat dengan tunggal $u = v + \psi \in W^{1,2}(\Omega)$ merupakan solusi masalah Dirichlet (7). ■

IV. NILAI EIGEN

Diperhatikan bahwa pada Teorema 3.6. ditunjukkan bahwa masalah Dirichlet (7) dapat direduksi menjadi masalah Dirichlet (6). Dengan demikian, untuk pembahasan selanjutnya akan dibahas mengenai masalah Dirichlet homogen pada domain Lipschitz terbatas Ω.

Lebih lanjut, pada bukti Teorema 3.4. diperoleh fungsi Λ merupakan anggota ruang dual $\left(W_c^{1,2}(\Omega)\right)^*$ dan untuk setiap $u, \psi \in W_c^{1,2}(\Omega)$,

$$|\mathrm{B}(u,\psi)| \leq \max\{M_1, M_2\} \|u\|_{1,2} \|\psi\|_{1,2},$$

dengan $M_1, M_2 \geq 0$ sehingga untuk setiap $i, j = 1,2, \dots, n$ diperoleh

$$\sup\{|a^{i,j}(x)| : x \in \Omega\} \leq M_1 \text{ dan}$$
$$\sup\{|b(x)| : x \in \Omega\} \leq M_2.$$

Lebih lanjut, karena L operator diferensial parsial linear eliptik order dua, maka terdapat $\theta \in \mathbb{R}$ sehingga $a^{i,j}\xi_i\xi_j \geq \theta\|\xi\|^2$, untuk setiap $x \in \Omega$ dan $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Dengan demikian, untuk setiap $u \in W_c^{1,2}(\Omega)$ diperoleh

$$\theta \int_\Omega |Du|^2 \leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} = B(u,u) + \int_\Omega bu^2 \leq B(u,u) + M_2 \int_\Omega u^2.$$

Diperhatikan bahwa menurut Teorema *Embedding* Sobolev, terdapat C sehingga $\|u\|_2 \leq C\|Du\|_2$. Akibatnya, terdapat konstanta $\beta > 0$ dan $\gamma \geq 0$ yang sesuai sehingga

$$\beta\left(\|u\|_{1,2}\right)^2 \leq B(u,u) + \gamma(\|u\|_2)^2. \tag{8}$$

Dengan memanfaatkan bilangan $\gamma \geq 0$ ini, pada Teorema 4.1. berikut dapat ditunjukkan bahwa ketunggalan solusi lemah masalah Dirichlet homogen berikut masih terjamin.

Teorema 4.1. *Terdapat bilangan $\gamma \geq 0$ sehingga untuk setiap $\mu \geq \gamma$, masalah Dirichlet homogen*

$$\begin{cases} L(u) + \mu u = g + \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f^i}{\partial x_i}, & pada\ \Omega, \\ u = 0, & pada\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{9}$$

mempunyai solusi lemah tunggal $u \in W_c^{1,2}(\Omega)$.

Bukti. Dipilih bilangan $\gamma \geq 0$ sehingga memenuhi pertidaksamaan (8). Dipilih sebarang $\mu \geq \gamma$, dan didefinisikan operator L_μ dan fungsi B_μ sehingga $L_\mu(u) = L(u) + \mu u$ dan

$$B_\mu(u,\psi) = B(u,\psi) + \mu \int_\Omega u\psi,$$

untuk setiap $u, \psi \in W_c^{1,2}(\Omega)$. Akibatnya, terdapat $\beta > 0$ dan $\delta \geq 0$ sehingga untuk setiap $u, \psi \in W_c^{1,2}(\Omega)$ berlaku

$$B_\mu(u,u) = B(u,u) + \mu \int_\Omega u^2 \geq \beta\left(\|u\|_{1,2}\right)^2$$

dan

$$\left|B_\mu(u,\psi)\right| = \left|B(u,\psi) + \mu \int_\Omega u\psi\right| \leq \delta\|u\|_{1,2}\|\psi\|_{1,2},$$

Lebih lanjut, karena Λ merupakan anggota ruang dual $\left(W_c^{1,2}(\Omega)\right)^*$ maka menurut Teorema Lax Milgram, terdapat dengan tunggal $u \in W_c^{1,2}(\Omega)$ sehingga $B_\mu(u,\psi) = \Lambda(\psi)$, untuk setiap $\psi \in W_c^{1,2}(\Omega)$. Dengan kata lain terbukti bahwa terdapat dengan tunggal solusi lemah $u \in W_c^{1,2}(\Omega)$ untuk masalah Dirichlet (9). ■

Diperhatikan bahwa spektrum operator kompak merupakan himpunan berhingga atau suatu barisan yang konvergen ke 0. Dengan memanfaatkan fakta tersebut diberikan syarat cukup dan perlu agar masalah Dirichlet berikut mempunyai solusi tunggal.

Teorema 4.2. *Masalah Dirichlet homogen*

$$\begin{cases} L(u) = \lambda u + \ g + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x_i}, \ pada\ \Omega \\ u = O, \qquad\qquad\qquad\quad pada\ \partial\Omega \end{cases} \tag{10}$$

mempunyai solusi lemah tunggal jika dan hanya jika $\lambda \notin \Sigma$, untuk suatu himpunan terhitung $\Sigma \in \mathbb{R}$. Jika Σ tidak berhingga maka $\Sigma = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ merupakan barisan naik monoton lemah dengan $\lambda_k \to \infty$.

Bukti. Tanpa mengurangi keumuman dipilih bilangan $\gamma > 0$ sehingga memenuhi Teorema 4.1. dan $\gamma > -\lambda$. Diperhatikan bahwa masalah Dirichlet (10) mempunyai solusi lemah tunggal untuk setiap $g, f^i \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ jika dan hanya jika $u = O$ merupakan solusi lemah tunggal untuk masalah Dirichlet

$$\begin{cases} L(u) = \lambda u, & \text{pada } \Omega \\ u = O, & \text{ada } \partial\Omega \end{cases}.$$

Ekuivalen menyatakan bahwa $u = O$ merupakan solusi lemah tunggal untuk masalah Dirichlet

$$\begin{cases} L(u) + \gamma u = (\gamma + \lambda)u, \ \text{pada } \Omega \\ \qquad\quad u = O, \ \text{pada } \partial\Omega. \end{cases} \tag{11}$$

Diperhatikan bahwa jika u solusi lemah masalah Dirichlet (11) maka

$$u = \left(\gamma {L_\gamma}^{-1} \tilde{I}\right)\left(\frac{\gamma + \lambda}{\gamma}\right) u \tag{12}$$

dengan $\gamma {L_\gamma}^{-1} \tilde{I}$ merupakan operator kompak. Jika $u = O$ satu-satunya yang memenuhi persamaan (12) maka $\frac{\gamma}{\gamma+\lambda}$ bukan nilai eigen dari operator kompak $\gamma {L_\gamma}^{-1} \tilde{I}$. Akibatnya, terbukti bahwa masalah Dirichlet (11) mempunyai solusi lemah tunggal untuk setiap $g, f^i \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ jika dan hanya jika $\frac{\gamma}{\gamma+\lambda}$ bukan nilai eigen dari operator kompak $\gamma {L_\gamma}^{-1} \tilde{I}$. Diperhatikan bahwa koleksi semua nilai eigen operator kompak $\gamma {L_\gamma}^{-1} \tilde{I}$ merupakan himpunan berhingga atau barisan yang konvergen ke 0. Jadi, terbukti bahwa masalah Dirichlet (10) mempunyai solusi lemah tunggal untuk setiap $g, f^i \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ kecuali untuk barisan naik monoton lemah dengan $\lambda_k \to \infty$. ∎

V. KESIMPULAN

Dapat disimpulkan bahwa salah satu syarat agar masalah Dirichlet persamaan diferensial linear eliptik order dua mempunyai solusi lemah tunggal adalah domainnya merupakan domain Lipschitz. Oleh karena itu, diharapkan pada penelitian selanjutnya, dapat dibahas mengenai masalah Dirichlet persamaan diferensial linear eliptik order dua pada himpunan yang lebih luas. Lebih lanjut, masalah Dirichlet homogen persamaan diferensial linear eliptik order dua mempunyai solusi lemah tunggal jika nilai eigennya bukan merupakan suatu anggota himpunan terhitung atau barisan naik monoton lemah yang konvergen ke tak hingga.

REFERENSI

[1] Adam, R.A. and J.J.F. Fournier, 1971, Some Imbedding Theorems for Sobolev Space, *Canadian Journal of Mathematics*, 23, 517-530.

[2] Ding, Z., 1996, A Proof of the Trace Theorem of Sobolev Space on Lipschitz Domains, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 124,2.

[3] Evans, L.C., 2010, *Partial Differential Equations, Second Edition*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, American Mathematical Society.
[4] Jerison, D., 1995, The Inhomogeneous Dirichlet Problem in Lipschitz Domains, *Journal of Functional Analysis*, 130, 161-219.
[5] Reddy, B.D., 1998, *Introductory Functional Analysis with Applications to Boundary Value Problems and Finite Elements*, Springer, New York.
[6] Savare, G., 1998, Regularity Results for Elliptic Equations in Lipschitz Domains, *Journal of Functional Analysis*, 152, 176-201.